

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ  
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ  
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ ІМЕНІ ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»

**БУЛАШЕНКО А. В.**

**ОСНОВИ ТЕОРІЇ КІЛ.  
ПІДГОТОВКА ДО ФАХОВОГО  
ВСТУПНОГО ВИПРОБУВАННЯ**

*Рекомендовано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського  
як навчальний посібник для студентів,  
які навчаються за спеціальністю 172 «Телекомунікації та радіотехніка»  
спеціалізацій «Радіотехнічні інформаційні системи», «Радіозв'язок і  
оброблення сигналів», «Радіосистемна інженерія», «Інтелектуальні технології  
мікросистемної радіoeлектронної техніки»*

Київ  
КПІ ім. Ігоря Сікорського  
2019

Рецензент                      Мосійчук В. С., к-т техн. наук, доцент

За редакцією Ястребова М.І.

*Гриф надано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського (протокол № 03 від 28.11.2019 р.) за поданням Вченої ради Радіотехнічного факультету (протокол № 11/2019 від 25.11.2019 р.)*

Електронне мережне навчальне видання



Булашенко А. В.

*Булашенко Андрій Васильович, ст. викладач*

## **ОСНОВИ ТЕОРІЇ КІЛ.**

### **ПІДГОТОВКА ДО ФАХОВОГО ВСТУПНОГО ВИПРОБУВАННЯ**

Основи теорії кіл. Підготовка до фахового вступного випробування [Електронний ресурс]: навч. посіб. для студентів спеціальності 172 «Телекомунікації та радіотехніка», спеціалізацій «Радіотехнічні інформаційні системи», «Радіозв'язок і оброблення сигналів», «Радіосистемна інженерія», «Інтелектуальні технології мікросистемної радіоелектронної техніки» / А. В. Булашенко; КПІ ім. Ігоря Сікорського. – Електронні текстові дані (1 файл 1.43 Мбайт). – Київ: КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2019. – 100 с.

Посібник містить приклади розв'язання задач, що виконуються під час складання фахового випробування на програму підготовки магістра з дисципліни «Основи теорії кіл» та мають на меті одержання практичних навичок при розв'язанні задач щодо розрахунку кіл постійного струму, змінного струму, коливальних контурів, схемних функцій та чотириполюсників, розрахунку перехідних процесів та розрахунок довгих ліній. В кінці посібника наведений короткий довідковий теоретичний матеріал.

Посібник буде корисний студентам, що мають на меті підготуватися до комплексного фахового випробування для вступу на програму підготовки магістра за спеціальністю 172 «Телекомунікації та радіотехніка» з дисципліни «Основи теорії кіл».

© А.В. Булашенко, 2019

## Зміст

Вступ .....	4
1. ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ.....	4
1.1. Кола постійного струму .....	4
1.2. Кола гармонічного струму .....	14
1.3. Коливальні контури .....	22
1.4. Схемні функції та прохідні чотириполюсники .....	30
1.5. Перехідні процеси .....	37
1.6. Довгі лінії.....	50
2. ДОПОМІЖНІ ФОРМУЛИ .....	60
2.1. Постійний струм .....	60
2.2. Гармонічний струм .....	67
2.3. Коливальні контури .....	74
2.4. Схемні функції та чотириполюсники.....	77
2.5. Перехідні процеси .....	81
2.6. Довгі лінії.....	88
СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ.....	94
ДОДАТОК А.....	96
ДОДАТОК Б .....	97
ДОДАТОК В.....	98
ДОДАТОК Г .....	99
ДОДАТОК Д.....	100

## Вступ

Навчальний посібник містить приклади розв'язання задач, для підготовки до фахового випробування для вступу на програму магістрів за спеціальністю 172 Телекомунікації та радіотехніка із дисципліни «Основи теорії кіл» і має на меті одержання практичних навичок при розв'язанні задач. Навчальний посібник містить задачі із методичних розробок кафедри [1-12].

### 1. ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ

#### 1.1. Кола постійного струму

**Приклад 1.1.** У колі (рис. 1.1) визначити всі струми та напруги на її елементах. Перевірити виконання балансу потужностей. Числові значення елементів наведені на схемі: опори в кОм, струми – мА, напруги – В.

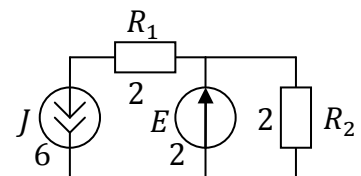


Рисунок 1.1

#### Розв'язання

За законом Ома (рис. 1.2)

$$I_2 = \frac{E}{R_2} = \frac{2}{2} = 1 \text{ мА};$$

$$U_1 = J R_1 = 6 \cdot 2 = 12 \text{ В.}$$

За першим законом Кірхгофа

$$I_E = I_2 + J = 1 + 6 = 7 \text{ мА.}$$

За другим законом Кірхгофа

$$U_J = U_1 - E = 12 - 2 = 10 \text{ В.}$$

Перевіримо виконання балансу потужностей

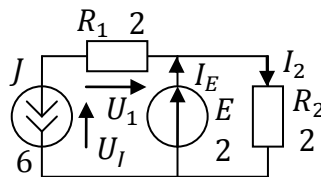


Рисунок 1.2

Потужність споживачів

$$P_{\text{СПОЖ}} = J^2 R_1 + I_2^2 R_2 = 6^2 \cdot 2 + 1^2 \cdot 2 = 72 + 2 = 74 \text{ мВт.}$$

Потужність джерел

$$\begin{aligned} P_{\text{ДЖ}} &= P_E + P_J = E \cdot I_E + J \cdot U_J = \\ &= 2 \cdot 7 + 10 \cdot 6 = 14 + 60 = 74 \text{ мВт.} \end{aligned}$$

Оскільки  $P_{\text{СПОЖ}} = P_{\text{ДЖ}}$ , то баланс потужностей виконується.

**Відповідь:**  $I_E = 7 \text{ мА}$ ,  $I_2 = 1 \text{ мА}$ ,  $u_1 = 12 \text{ В}$ ,  $u_2 = 2 \text{ В}$ ,  $u_J = 10 \text{ В}$ ,  $P = 74 \text{ мВт}$ .

**Приклад 1.2.** У колі (рис. 1.3) визначити струми у всіх гілках та напругу на її елементах. Перевірити виконання балансу потужностей. Числові значення елементів наведені на схемі: опори у кОм, струми – мА, напруги – В.

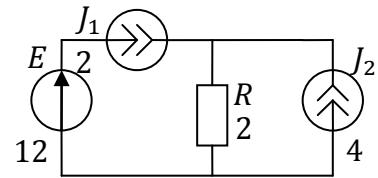


Рисунок 1.3

*Розв'язання*

За першим законом Кірхгофа (рис. 1.4)

$$I_R = J_1 + J_2 = 2 + 4 = 6 \text{ мА.}$$

За законом Ома

$$U = I_R \cdot R = 6 \cdot 2 = 12 \text{ В.}$$

За другим законом Кірхгофа

$$U + U_{J1} - E = 0$$

Звідси напруга на джерелі струму  $J_1$

$$U_{J1} = E - U = 12 - 12 = 0.$$

Перевіримо виконання балансу потужностей.

Потужність споживача

$$P_{\text{спож}} = I_R^2 R = 6^2 \cdot 2 = 36 \cdot 2 = 72 \text{ мВт.}$$

Потужність джерел

$$\begin{aligned} P_{\text{дж}} &= P_E + P_{J1} + P_{J2} = E \cdot J_1 + J_1 \cdot U_{J1} + J_2 \cdot U = \\ &= 12 \cdot 2 + 2 \cdot 0 + 4 \cdot 12 = 24 + 0 + 48 = 24 + 48 = 72 \text{ мВт.} \end{aligned}$$

Оскільки  $P_{\text{спож}} = P_{\text{дж}}$ , то баланс потужностей виконується.

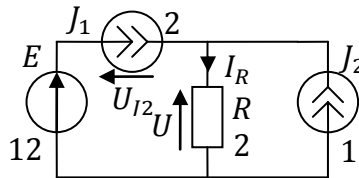


Рисунок 1.4

Відповідь:  $I_R = 3 \text{ мА}$ ,  $u_{J1} = 6 \text{ В}$ ,  $P = 18 \text{ мВт}$ ,  $U_{J1} = 6 \text{ В}$ ,  $U_R = 6 \text{ В}$ .

**Приклад 1.3.** У колі (рис. 1.5) визначити вхідну напругу  $E$  та споживану потужність кола. Відомо, що напруга  $U_3 = 10$  В. Числові значення елементів подані на схемі: опори в кОм.

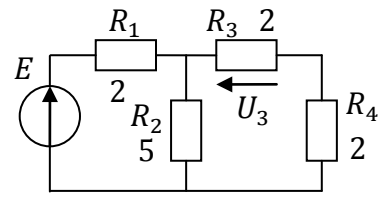


Рисунок 1.5

*Розв'язання*

Із закону Ома визначимо струм (рис. 1.6)

$$I_3 = \frac{U_3}{R_3} = \frac{10}{2} = 5 \text{ мА.}$$

Напругу на опорі

$$U_4 = I_3 R_4 = 5 \cdot 2 = 10 \text{ В.}$$

За другим законом Кірхгофа

$$U_2 = U_3 + U_4 = 10 + 10 = 20 \text{ В.}$$

Визначимо струм  $I_2$

$$I_2 = \frac{U_2}{R_2} = \frac{20}{5} = 4 \text{ мА.}$$

За першим законом Кірхгофа

$$I_1 = I_2 + I_3 = 4 + 5 = 9 \text{ мА.}$$

За законом Ома

$$U_1 = I_1 R_1 = 9 \cdot 2 = 18 \text{ В.}$$

За другим законом Кірхгофа

$$E = U_1 + U_2 = 18 + 20 = 38 \text{ В.}$$

Споживану потужність визначаємо із балансу потужностей

$$P_R = P_E = I_1 \cdot E = 9 \cdot 38 = 342 \text{ мВт.}$$

Напрями струмів та напруг у схемі зображені на рис. 1.6.

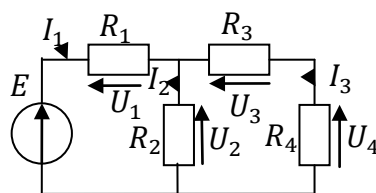


Рисунок 1.6

Відповідь:  $E = 38$  В,  $P_R = 342$  мВт.

**Приклад 1.4.** У колі (рис. 1.7) методом накладання (на підставі принципу суперпозиції) визначити всі струми та перевірити виконання балансу потужностей. Числові значення елементів наведені на схемі: опори – кОм, напруги – В, струми – мА.

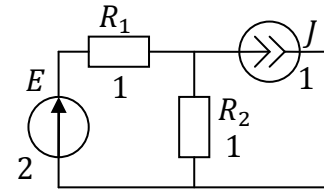


Рисунок 1.7

#### Розв'язання

Нехай у колі є лише одне джерело напруги  $E$ , а джерело струму  $J$  замінюємо його внутрішнім опором, тобто розривом (рис. 1.8).

За законом Ома

$$I_{1a} = \frac{E_1}{R_1 + R_2} = \frac{2}{1 + 1} = 1 \text{ мА.}$$

Отже,

$$I_{1a} = I_{2a} = 1 \text{ мА.}$$

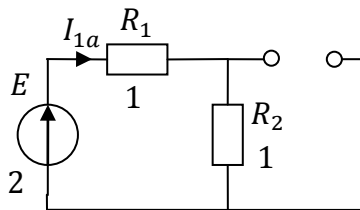


Рисунок 1.8

Схема, коли діє лише джерело струму  $J$ , а джерело напруги  $E$  замінимо його внутрішнім опором, тобто замкнуткою (рис. 1.9).

За формулою дільника струму

$$I_{1b} = \frac{J \cdot R_1}{R_1 + R_2} = \frac{1 \cdot 1}{1 + 1} = 0.5 \text{ мА;}$$

$$I_{2b} = \frac{J \cdot R_2}{R_1 + R_2} = \frac{1 \cdot 1}{1 + 1} = 0.5 \text{ мА.}$$

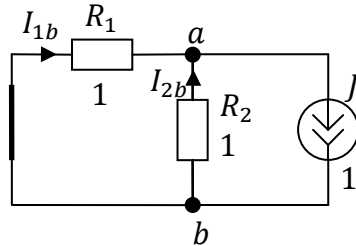


Рисунок 1.9

За принципом суперпозиції (рис. 1.10)

$$I_1 = I_{1a} + I_{1b} = 1 + 0.5 = 1.5 \text{ мА;}$$

$$I_2 = I_{1a} + I_{1b} = 1 - 0.5 = 0.5 \text{ мА.}$$

За законом Ома для початкової схеми (рис. 1.10)

$$U_2 = I_2 R_2 = 0.5 \cdot 1 = 0.5 \text{ В.}$$

Перевіримо виконання балансу потужностей.

Потужність споживачів

$$P_{\text{спож}} = I_1^2 R_1 + I_2^2 R_2 = 1.5^2 \cdot 1 + 0.5^2 \cdot 1 = 2.25 + 0.25 = 2.5 \text{ мВт.}$$

Потужність джерел

$$P_{\text{дж}} = P_E + P_J = I_1 \cdot E - J \cdot U_2 = 2 \cdot 1.5 - 1 \cdot 0.5 = 3 - 0.5 = 2.5 \text{ мВт.}$$

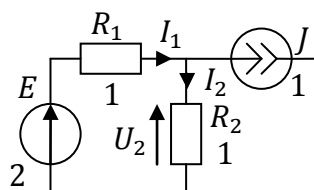


Рисунок 1.10

**Відповідь:**  $I_1 = 1.5 \text{ мА}$ ,  $I_2 = 0.5 \text{ мА}$ ,  $P = 2.5 \text{ мВт}$ .

**Приклад 1.5.** У колі (рис. 1.10) визначити струми у гілках методом контурних струмів. Числові значення елементів наведені на схемі: опори в кОм, напруги в В, струми в мА.

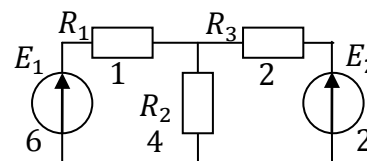


Рисунок 1.10

### Розв'язання

За методом контурних струмів, обравши напрямки протікання контурних струмів за годинниковою стрілкою (рис. 1.11)

$$\begin{bmatrix} E_1 \\ -E_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_1 + R_2 & -R_2 \\ -R_2 & R_2 + R_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_I \\ I_{II} \end{bmatrix}.$$

Підставимо числові значення

$$\begin{bmatrix} 6 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + 4 & -4 \\ -4 & 4 + 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_I \\ I_{II} \end{bmatrix}.$$

Визначники

$$\Delta = \begin{vmatrix} 5 & -4 \\ -4 & 6 \end{vmatrix} = 30 - 16 = 14;$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 6 & -4 \\ -2 & 6 \end{vmatrix} = 36 - 8 = 28; \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ -4 & -2 \end{vmatrix} = -10 + 24 = 14.$$

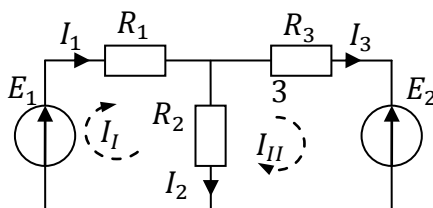


Рисунок 1.11

За методом Крамера

$$I_I = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{28}{14} = 2 \text{ мА}; \quad I_{II} = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{14}{14} = 1 \text{ мА}.$$

За першим законом Кірхгофа

$$I_1 = I_I = 2 \text{ мА}; \quad I_3 = I_{II} = 1 \text{ мА}; \quad I_2 = I_I - I_3 = 2 - 1 = 1 \text{ мА}.$$

Відповідь:  $I_1 = 2 \text{ мА}; I_2 = 1 \text{ мА}; I_3 = 1 \text{ мА}.$



**Приклад 1.6.** У колі (рис. 1.12) визначити методом вузлових напруг напруги та струми на елементах. Числові значення елементів наведені на схемі: опори в кОм, струми – мА, напруги – В.

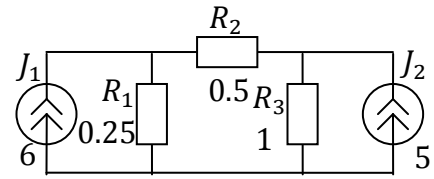


Рисунок 1.12

#### Розв'язання

У колі (рис. 1.12) пронумеруємо вузли та визначимо напрямки вузлових напруг (рис. 1.13) і запишемо систему на основі методу вузлових напруг

$$\begin{bmatrix} J_1 \\ J_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1 + g_2 & -g_2 \\ -g_2 & g_2 + g_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_{10} \\ u_{20} \end{bmatrix}.$$

Підставимо числові значення

$$\begin{bmatrix} 6 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 + 2 & -2 \\ -2 & 2 + 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_{10} \\ u_{20} \end{bmatrix}.$$

Обчислимо визначники

$$\Delta = \begin{vmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = 18 - 4 = 14;$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 6 & -2 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = 18 + 10 = 28; \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 6 & 6 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} = 30 + 12 = 42.$$

Струми за методом Крамера

$$u_{10} = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{28}{14} = 2 \text{ В}; \quad u_{20} = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{42}{14} = 3 \text{ В}.$$

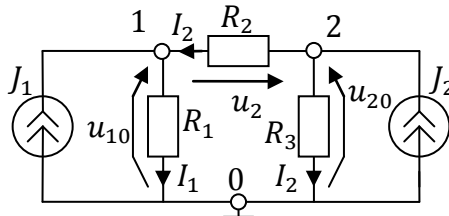


Рисунок 1.13

Напруги на елементах кола (рис. 1.13)

$$u_1 = u_{10} = 2 \text{ В}, \quad u_3 = u_{20} = 3 \text{ В}.$$

За другим законом Кірхгофа

$$u_2 = u_3 - u_1 = 3 - 2 = 1 \text{ В}.$$

Струми у гілках за законом Ома (рис. 1.13)

$$I_2 = u_2 \cdot g_2 = 1 \cdot 2 = 2 \text{ мА};$$

$$I_1 = u_1 \cdot g_1 = 2 \cdot 4 = 8 \text{ мА};$$

$$I_3 = u_3 \cdot g_3 = 3 \cdot 1 = 3 \text{ мА};$$

Відповідь:  $u_1 = 2 \text{ В}$ ,  $u_2 = 1 \text{ В}$ ,  $u_3 = 3 \text{ В}$ ,  $I_1 = 2 \text{ мА}$ ,  $I_2 = 1 \text{ мА}$ ,  $I_3 = 3 \text{ мА}$ .

<b>Приклад 1.7.</b> У колах (рис. 1.14) виділену частину представити еквівалентним генератором та визначити його параметри. Числові значення елементів наведені на схемі: опори в кОм, струми – мА, напруги – В.			
а)		б)	
Рисунок 1.14			

Розв'язання

а) Визначимо параметри еквівалентного генератора (рис. 1.15 а). У колі (рис. 1.14 а) від'єднаємо опір навантаження  $R_H$  (рис. 1.15 б) та визначимо напругу холостого ходу за формулою дільника напруги

$$U_2 = E_{EG} = \frac{E \cdot R_2}{R_1 + R_2} = \frac{10 \cdot 2}{2 + 2} = \frac{10}{2} = 5 \text{ В.}$$

У колі (рис. 1.14 а) замінимо джерело  $E$  його внутрішнім опором, тобто закороткою (рис. 1.15 в) і визначимо опір еквівалентного генератора

$$R_{EG} = R_{BX} = R_3 + \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} = 2 + \frac{2 \cdot 2}{2 + 2} = 2 + 1 = 3 \text{ кОм.}$$

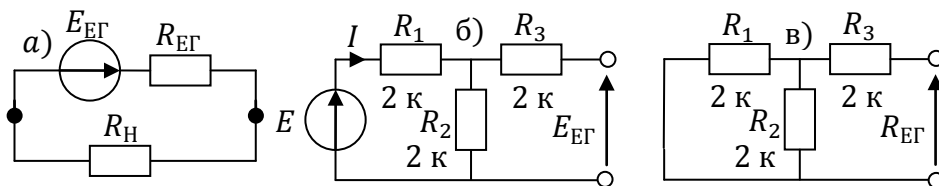


Рисунок 1.15

б) Визначимо параметри еквівалентного генератора (рис. 1.16 а). У колі (рис. 1.14 б) від'єднаємо опір навантаження  $R_H$  (рис. 1.16 б) та визначимо напругу холостого ходу

$$E_{EG} = U_2 = J \cdot R_2 = 3 \cdot 6 = 18 \text{ В.}$$

У колі (рис. 1.14 б) замінимо джерело  $E$  його внутрішнім опором, тобто закороткою (рис. 1.16 в) і визначимо опір еквівалентного генератора

$$R_{EG} = R_{BX} = R_3 + R_3 = 6 + 6 = 12 \text{ кОм.}$$

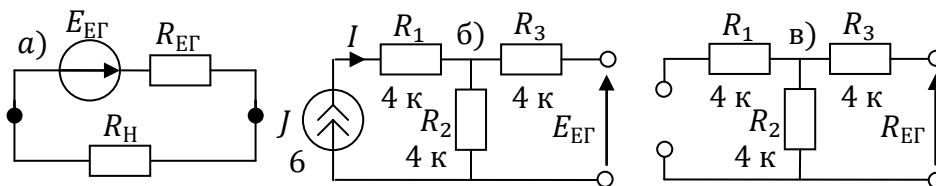


Рисунок 1.16

**Відповідь:** а)  $E_{EG} = 5 \text{ В}$ ,  $R_{EG} = 3 \text{ кОм}$ ; б)  $E_{EG} = 18 \text{ В}$ ,  $R_{EG} = 12 \text{ кОм}$ .

**Приклад 1.8.** У колі (рис. 1.17) визначити величину та напрям струму у гілці із опором  $R_1$  методом еквівалентного генератора та визначити параметри еквівалентного генератора. Числові значення елементів наведені на схемах: опори в кОм, струми – мА, напруги – В.

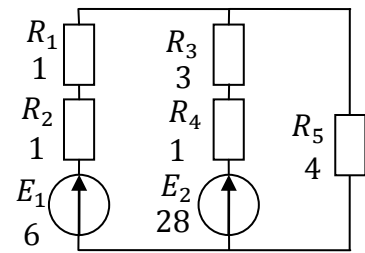


Рисунок 1.17

*Розв'язання*

У колі (рис. 1.17) від'єднаємо опір  $R_1$  (рис. 1.18 а) та визначимо за формулою дільника напруги

$$u_5 = \frac{E_2 \cdot R_5}{R_3 + R_4 + R_5} = \frac{28 \cdot 4}{3 + 1 + 4} = 14 \text{ В.}$$

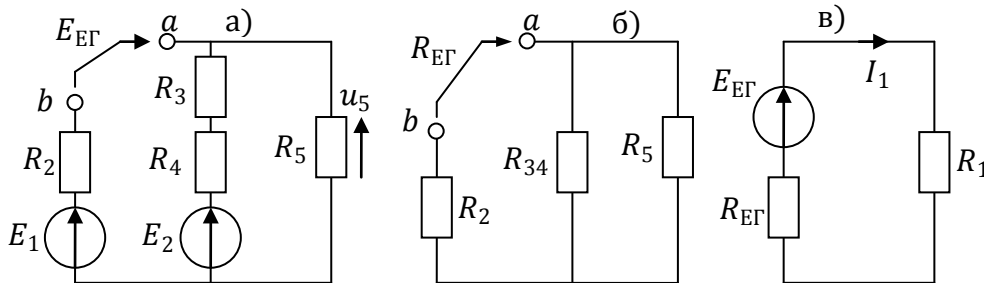


Рисунок 1.18

За другим законом Кірхгофа

$$E_{\text{ЕГ}} = u_5 - E_1 = 14 - 6 = 8 \text{ В.}$$

Опір еквівалентного генератора (рис. 1.18 б)

$$R_{\text{ЕГ}} = R_2 + \frac{R_3 \cdot R_5}{R_3 + R_5} = 1 + \frac{4 \cdot 4}{4 + 4} = 3 \text{ кОм.}$$

Представимо коло (рис. 1.17) відносно  $R_1$  еквівалентним генератором (рис. 1.18 в) і визначимо струм

$$I_1 = \frac{E_{\text{ЕГ}}}{R_1 + R_{\text{ЕГ}}} = \frac{8}{3 + 1} = 2 \text{ мА.}$$

Відповідь:  $I_1 = 2 \text{ мА}$ ,  $E_{\text{ЕГ}} = 8 \text{ В}$ ,  $R_{\text{ЕГ}} = 3 \text{ кОм}$ .

**Приклад 1.9.** У колі (рис. 1.19) методом еквівалентного генератора знайти струм через опір  $R_3$ . Визначити параметри еквівалентного генератора. Числові значення елементів наведені на схемі: опори в кОм, струми – мА, напруги – В.

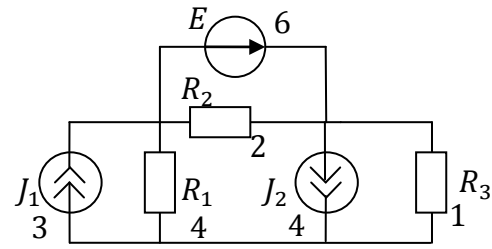


Рисунок 1.19

*Розв'язання*

У колі (рис. 1.19) від'єднаємо опір  $R_3$  (рис. 1.20 а) та визначимо параметри еквівалентного генератора

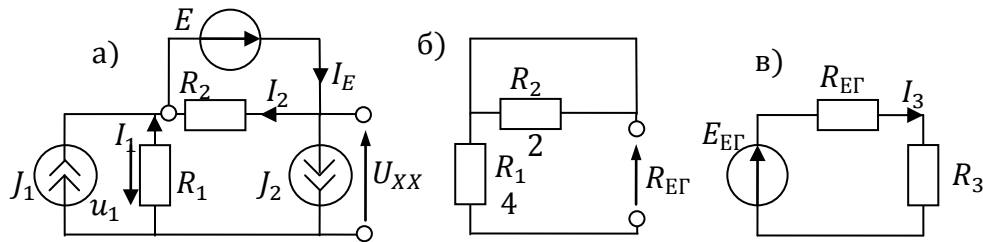


Рисунок 1.20

У колі (рис. 1.20 а) за законом Ома

$$I_2 = \frac{E}{R_2} = \frac{6}{2} = 3 \text{ мА.}$$

За першим законом Кірхгофа (рис. 1.20 а)

$$I_E = I_2 + J_2 = 3 + 4 = 7 \text{ мА;}$$

$$I_1 = I_E - I_2 - J_1 = 7 - 3 - 3 = 1 \text{ мА.}$$

Напруга за законом Ома

$$u_1 = I_1 \cdot R_1 = 1 \cdot 4 = 4 \text{ В.}$$

За другим законом Кірхгофа

$$E_{\text{ЕГ}} = E - u_1 = 6 - 4 = 2 \text{ В.}$$

У колі (рис. 1.20 а) замінимо джерела  $J_1$ ,  $J_2$  та  $E$  їх внутрішніми опором (рис. 1.20 б) і визначимо опір еквівалентного генератора

$$R_{\text{ЕГ}} = R_1 = 1 \text{ кОм.}$$

Представимо коло (рис. 1.19) відносно  $R_3$  еквівалентним генератором (рис. 1.20 в) і визначимо струм

$$I_3 = \frac{E_{\text{ЕГ}}}{R_{\text{ЕГ}} + R_3} = \frac{2}{4 + 1} = 0.4 \text{ мА.}$$

Відповідь:  $E_{\text{ЕГ}} = 2 \text{ В; } R_{\text{ЕГ}} = 1 \text{ кОм, } I_3 = 0.4 \text{ мА.}$

**Приклад 1.10.** У колі (рис. 1.21) визначити параметри еквівалентного генератора відносно опору  $R_H$  та струм через опір  $R_H$ . Числові значення елементів кіл: опори в кОм, струми в мА, крутизна  $S$  в мА/В.

Рисунок 1.21

*Розв'язання*

Всі опори беремо у кОм, струми в мА, напруга у В, крутизну  $S$  в мА/В.

У колі (рис. 1.21) від'єднаємо опір  $R_H$  (рис. 1.22 а) та пронумеруємо вузли.

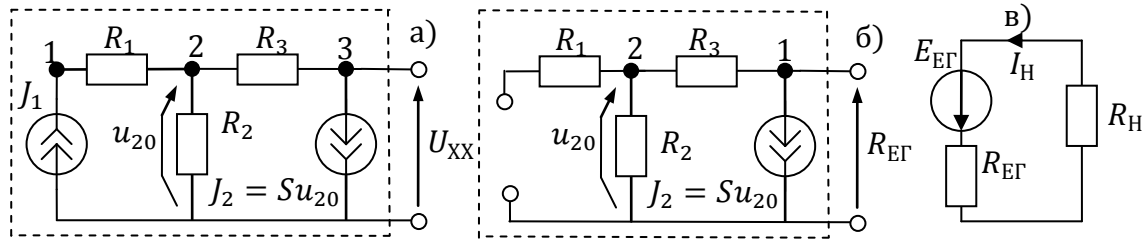


Рисунок 1.22

Матриця провідностей кола (рис. 1.22 а):

$$G = \begin{bmatrix} g_1 & -g_1 & 0 \\ -g_1 & g_1 + g_2 + g_3 & -g_3 \\ 0 & -g_3 + S & g_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 6 & -2 \\ 0 & -2 + 12 & 2 \end{bmatrix}.$$

Напруга еквівалентного генератора:

$$E_{EG} = J_1 Z_{пер.31} = J_1 \frac{\Delta_{13}}{\Delta} = 2 \cdot \frac{-20}{56} = -\frac{5}{7} \text{ В},$$

де визначники

$$\begin{aligned} \Delta &= \begin{vmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 6 & -2 \\ 0 & 10 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 6 & -2 \\ 10 & 2 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} -2 & -2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = \\ &= 2 \cdot (12 + 20) - 2 \cdot 4 = 64 - 8 = 56; \\ \Delta_{13} &= \begin{vmatrix} -2 & 6 \\ 0 & 10 \end{vmatrix} = -20; \quad \Delta_{33} = \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 6 \end{vmatrix} = 12 - 4 = 8. \end{aligned}$$

У колі (рис. 1.22 а) замінимо джерело  $J_1$  внутрішнім опором, тобто розривом (рис. 1.22 б) та пронумеруємо вузли і запишемо матрицю провідностей

$$G1 = \begin{bmatrix} g_3 & -g_3 + S \\ -g_3 & g_2 + g_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 10 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$$

Звідси опір еквівалентного генератора

$$R_{EG} = \frac{\Delta_{11}}{\Delta} = \frac{4}{8 + 20} = \frac{4}{28} = \frac{1}{7} \text{ кОм}.$$

Струм у колі (рис. 1.22 в)

$$I_H = \frac{E_{EG}}{R_{EG} + R_H} = \frac{5/7}{1/7 + 1} = \frac{5}{8} \text{ мА}.$$

Відповідь:  $E_{EG} = -5/7 \text{ В}$ ,  $R_{EG} = 1/7 \text{ кОм}$ ,  $I_H = 5/8 \text{ мА}$ .

## 1.2. Кола гармонічного струму

**Приклад 1.11.** У колі (рис. 1.23) визначити струм  $i(t)$ . Відомо, що числові значення елементів кола:  $R_1 = 1$  кОм,  $R_2 = 2$  кОм, а реактивні опори на частоті  $\omega$  становлять  $X_L = 9$  кОм,  $X_C = 6$  кОм, напруга джерела  $e(t) = 6\sqrt{2} \cos(\omega t + 50^\circ)$  В. Якісно побудувати векторну діаграму струмів та напруг кола.

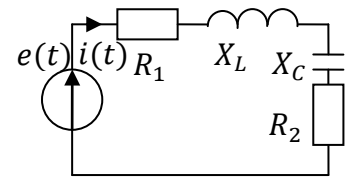


Рисунок 1.23

### Розв'язання

Розрахунки будемо здійснювати у одиницях: опори – кОм, струм – мА, напруга – В, частота – рад/мкс.

Комплексні опори індуктивності та ємності

$$Z_L = j\omega L = jX_L = 9j; \quad Z_C = \frac{1}{j\omega C} = -j\frac{1}{\omega C} = -jX_C = -6j.$$

Вхідний опір кола (рис. 1.23)

$$Z = R_1 + R_2 + jX_L - jX_C = 1 + 2 + 9j - 6j = 3 + 3j = 3\sqrt{2}e^{45^\circ j}.$$

Комплексна амплітуда напруги

$$\dot{E}_m = 6\sqrt{2}e^{50^\circ j}, \text{ В.}$$

Закон Ома для комплексних амплітуд

$$\dot{I}_m = \frac{\dot{E}_m}{Z} = \frac{6\sqrt{2}e^{50^\circ j}}{3\sqrt{2}e^{45^\circ j}} = 2e^{5^\circ j}$$

Струм

$$i(t) = 2 \cos(\omega t + 5^\circ) \text{ мА.}$$

Якісно побудуємо векторну діаграму струмів та напруг (рис. 1.24).

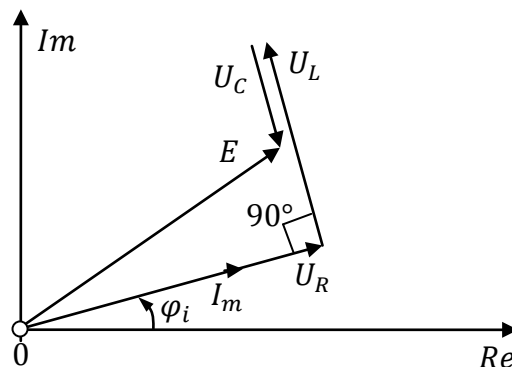


Рисунок 1.24

Відповідь:  $i(t) = 2 \cos(\omega t + 5^\circ) \text{ мА.}$

**Приклад 1.12.** У колі (рис. 1.25) визначити струм  $j(t)$ . Відомо, що числові значення елементів кола:  $R = 0.25$  кОм, реактивні провідності на частоті  $\omega$  становлять  $b_L = 6$  мСім,  $b_C = 10$  мСім, напруга джерела  $u_j(t) = 3\sqrt{2} \cos(\omega t - 10^\circ)$  В.

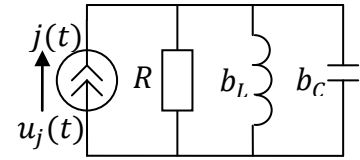


Рисунок 1.25

#### Розв'язання

Розрахунки будемо здійснювати у одиницях: провідності – мСім, струм – мА, напруга – В, частота – рад/мкс.

Комплексні провідності ємності та індуктивності

$$Y_C = \frac{1}{Z_C} = j\omega C = jb_C; \quad Y_L = \frac{1}{Z_L} = \frac{1}{j\omega L} = -j \frac{1}{\omega L} = -jb_L.$$

Вхідна провідність кола (рис. 2.9 б)

$$Y = g + jb_C - jb_L = 4 + 10j - 6j = 4 + 4j = 4\sqrt{2}e^{45^\circ j}.$$

Комплексна амплітуда напруги

$$\dot{U}_{jm} = 3\sqrt{2}e^{-10^\circ j}, \text{ В.}$$

Закон Ома для комплексних амплітуд

$$\dot{J}_m = \dot{U}_{jm} \cdot Y = 3\sqrt{2}e^{-10^\circ j} \cdot 4\sqrt{2}e^{45^\circ j} = 24e^{35^\circ j}.$$

Струму

$$j(t) = 24 \cos(\omega t + 35^\circ) \text{ мА.}$$

Якісно побудуємо векторну діаграму струмів та напруг (рис. 1.26).

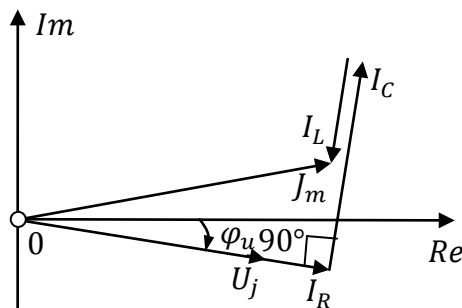
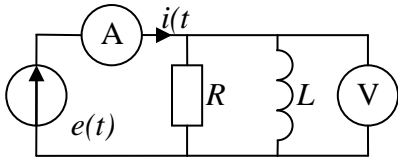


Рисунок 1.26

Відповідь:  $j(t) = 24 \cos(\omega t + 35^\circ) \text{ мА.}$

<p><b>Приклад 1.13.</b> У колі (рис. 1.27) на частоті <math>\omega = 10^6</math> рад/с знайти напругу <math>e(t)</math> та показання амперметра та вольтметра. Числові параметри елементів такі: <math>i(t) = 8\sqrt{2} \cos(\omega t - 30^\circ)</math> мА, <math>L = 1</math> мГн, <math>R = 1</math> кОм.</p>	 <p style="text-align: center;">Рисунок 1.27</p>
--	---

*Розв'язання*

Розрахунки будемо здійснювати у одиницях: індуктивність – мГн, опір – кОм, провідність – мСім, частота – рад/мкс.

Комплексна провідність індуктивності

$$Y_L = \frac{1}{j\omega L} = \frac{1}{j \cdot 1 \cdot 1} = -j \text{ мСім.}$$

Еквівалентна провідність паралельних гілок

$$Y_E = g + Y_L = 1 - j = \sqrt{2}e^{-j45^\circ}.$$

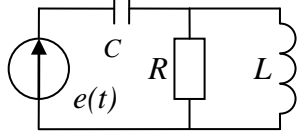
Комплексна амплітуда струму  $\dot{I}_m = 8\sqrt{2} \cdot e^{-j30^\circ}$ .

За законом Ома

$$\dot{E}_m = \frac{\dot{I}_m}{Y_{\text{ЗАГ}}} = \frac{8\sqrt{2}e^{-j30^\circ}}{\sqrt{2}e^{-j45^\circ}} = 8e^{j15^\circ}$$

Отже вольтметр показує  $E_d = 8/\sqrt{2} = 4\sqrt{2}$  В, а амперметр  $I_d = \frac{8\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 8$  мА.

Гармонічна напруга  $e(t) = 8 \cdot \cos(\omega t + 15^\circ)$  В.

<p><b>Приклад 1.14.</b> У колі (рис. 1.28) на частоті <math>\omega = 10^6</math> рад/с знайти вхідний опір. Який буде початковий аргумент вхідного струму. Вхідна напруга <math>e(t) = E_m \cos(\omega t + 20^\circ)</math> В. Числові значення: <math>L = 2</math> мГн, <math>C = 0.5</math> нФ, <math>R = 2</math> кОм.</p>	 <p style="text-align: center;">Рисунок 1.28</p>
---	---

*Розв'язання*

Розрахунки будемо здійснювати у одиницях: індуктивність – мГн, ємність – нФ, опір – кОм, частота – рад/мкс.

Комплексні опори

$$Z_C = \frac{1}{j\omega C} = \frac{1}{j \cdot 1 \cdot 0.5} = -2j \text{ кОм}; \quad Z_L = j\omega L = j1 \cdot 2 = 2j \text{ кОм.}$$

Еквівалентний опір паралельних гілок

$$Z_E = \frac{R \cdot Z_L}{R + Z_L} = \frac{2 \cdot 2j}{2 + 2j} = \frac{2j}{1 + j} = \frac{2e^{j90^\circ}}{2\sqrt{2}e^{j45^\circ}} = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{j45^\circ} = 1 + j.$$

Вхідний опір кола  $Z_{\text{ВХ}} = Z + Z_C = 1 + j - 2j = 1 - j = \sqrt{2}e^{-j45^\circ}$  кОм.

Комплексна амплітуда вхідної напруги  $\dot{E} = E_m e^{j\varphi_e} = E_m e^{j100^\circ}$ .

Вхідний струм із закону Ома

$$\dot{I}_m = \frac{\dot{E}}{Z} = \frac{E_m e^{j100^\circ}}{\sqrt{2}e^{-j45^\circ}} = \frac{E_m}{\sqrt{2}} e^{j145^\circ}.$$

Отже початковий аргумент вхідного струму становить  $\varphi_i = 145^\circ$ .



**Приклад 1.15.** У колі (рис. 1.29) у гармонічному режимі на частоті  $\omega = 10^6$  рад/с визначити показання амперметра та вольтметра. Відомо, що амплітуди струмів у опорі  $R \in 3\text{мА}$  та індуктивності  $L \in 4\text{мА}$ ,  $L = 3\text{мГн}$ ,  $R = 4\text{кОм}$ .

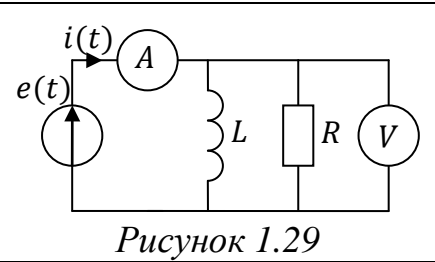


Рисунок 1.29

#### Розв'язання

Розрахунки будемо здійснювати у одиницях: індуктивність – мГн, провідність – мСім, частота – рад/мкс.

Комплексна провідність індуктивності

$$Y_L = \frac{1}{j\omega L} = \frac{1}{j \cdot 1 \cdot 3} = -j \frac{1}{3} \text{ мСім.}$$

Еквівалентна провідність

$$Y_E = g + Y_L = \frac{1}{4} - j \frac{1}{3}.$$

Модуль провідності

$$|Y_E| = \sqrt{\left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{1}{5} = 0.2 \text{ мСім.}$$

Із векторної діаграми струмів (рис. 1.30) бачимо, що

$$I_{mA} = \sqrt{I_R^2 + I_L^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5 \text{ мА.}$$

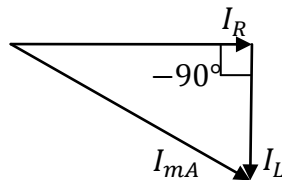


Рисунок 1.30

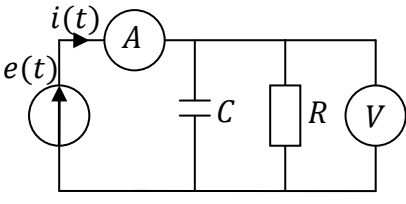
Отже, амперметр показує

$$I_d = \frac{I_{mA}}{\sqrt{2}} = \frac{5}{\sqrt{2}} = 2.5\sqrt{2} \text{ мА.}$$

Показання вольтметра із закону Ома

$$E_d = \frac{I_A}{|Y_E|} = \frac{5}{0.2\sqrt{2}} = \frac{25}{\sqrt{2}} = 12.5\sqrt{2} \text{ В.}$$

Відповідь:  $I_d = 2.5\sqrt{2} \text{ мА}$ ,  $E_d = 12.5\sqrt{2} \text{ В}$ .

<p><b>Приклад 1.16.</b> У колі (рис. 1.24) на частоті <math>\omega = 10^6</math> рад/с визначити показання амперметра та вольтметра. Відомо, що амплітуди струмів у опорі <math>R \in 8</math> мА та ємності <math>C \in 6</math> мА. Числові значення елементів: <math>C = 125</math> пФ, <math>R = 6</math> кОм.</p>	 <p style="text-align: center;">Рисунок 1.31</p>
--	---

*Розв'язання*

Розрахунки будемо здійснювати у одиницях: ємність – нФ, опір – кОм, провідність – мСім, частота – рад/мкс.

Комплексна провідність ємності

$$Y_C = j\omega C = j \cdot 1 \cdot 0.125 = j \frac{1}{8} \text{ мСім.}$$

Еквівалентна провідність

$$Y_E = g + Y_C = \frac{1}{6} + j \frac{1}{8}.$$

Модуль провідності

$$|Y_E| = \sqrt{\left(\frac{1}{6}\right)^2 + \left(\frac{1}{8}\right)^2} = \frac{1}{10} = 0.1 \text{ мСім.}$$

Із векторної діаграми струмів (рис. 1.32) бачимо, що

$$I_{mA} = \sqrt{I_R^2 + I_C^2} = \sqrt{8^2 + 6^2} = 10 \text{ мА.}$$

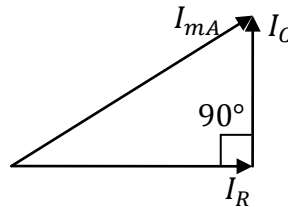


Рисунок 1.32

Отже, амперметр показує

$$I_D = \frac{I_{mA}}{\sqrt{2}} = \frac{10}{\sqrt{2}} = 5\sqrt{2} \text{ мА.}$$

Показання вольтметра із закону Ома

$$E_D = \frac{I_D}{|Y_E|} = \frac{5\sqrt{2}}{0.1} = 50\sqrt{2} \text{ В}$$

Відповідь:  $I_D = 5\sqrt{2}$  мА,  $E_D = 50\sqrt{2}$  В.

<p><b>Приклад 1.17.</b> У колі (рис. 1.33) знайти опори <math>R</math> та <math>X_L</math>. Відомо, що добротність гілки на відомій частоті <math>\omega</math> дорівнює <math>\sqrt{3}</math>. На вході цього кола діюче значення напруги та струму дорівнюють відповідно 20 В та 5 мА.</p>	<p style="margin-top: 10px;"><i>Рисунок 1.33</i></p>
--	--

*Розв'язання*

Розрахунки будемо здійснювати у одиницях: струм – мА, напруга – В, опір – кОм.

Добротність гілки

$$Q_X = \frac{Q_L}{P_R} = \frac{I^2 X_L}{I^2 R} = \frac{X_L}{R}.$$

Реактивний опір індуктивності

$$X_L = Q_X \cdot R = \sqrt{3}R.$$

Модуль вхідного опору

$$|Z| = \frac{U_D}{I_D} = \frac{10}{5} = 2 \text{ кОм}.$$

Загальний опір кола

$$Z = R + jX_L.$$

Модуль опора гілки

$$|Z| = \sqrt{R^2 + X_L^2},$$

$$2 = \sqrt{(\sqrt{3}R)^2 + R^2}.$$

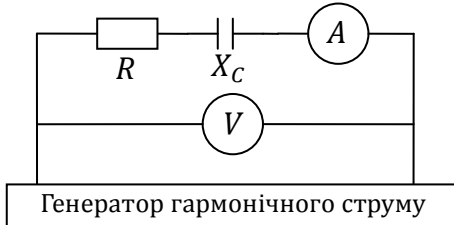
Звідси визначимо активний опір

$$R = 1 \text{ кОм}.$$

Реактивний опір індуктивності

$$X_L = \sqrt{3}R = \sqrt{3} \text{ кОм}.$$

Відповідь:  $R = 1 \text{ кОм}$ ,  $X_L = \sqrt{3} \text{ кОм}$ .

<p><b>Приклад 1.18.</b> У колі (рис. 1.34) на відомій частоті <math>\omega</math> знайти ємнісний опір <math>X_C</math> та коефіцієнт потужності <math>k_p</math>. На вході цього кола діюче значення напруги та струму дорівнюють відповідно 40 В та 4 мА. Активний опір кола <math>R = 8</math> кОм.</p>	 <p>Рисунок 1.34</p>
--	--

*Розв'язання*

Розрахунки будемо здійснювати у одиницях: ємність – нФ, опір – кОм, напруга – В, струм – мА, потужність – мВт, повна потужність – мВА.

Модуль вхідного опору

$$|Z| = \frac{U_D}{I_D} = \frac{40}{4} = 10 \text{ кОм.}$$

Загальний опір кола та його модуль

$$Z = R - jX_C, \quad |Z| = \sqrt{R^2 + X_C^2}$$

Звідси визначимо

$$X_C = \sqrt{|Z|^2 - R^2} = \sqrt{10^2 - 8^2} = 6 \text{ кОм.}$$

Активна та модуль повної потужності

$$P = I_D^2 \cdot R = 4^2 \cdot 8 = 128 \text{ мВт;}$$

$$|\dot{S}| = I_D \cdot U_D = 4 \cdot 40 = 160 \text{ мВА;}$$

Побудуємо трикутник потужностей (рис. 1.35).

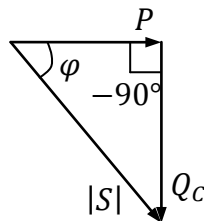
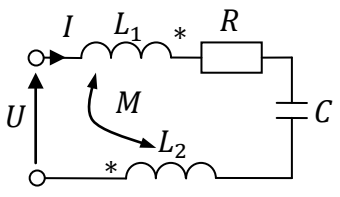


Рисунок 1.35

Коефіцієнт потужності

$$k_p = \cos \varphi = \frac{P}{|S|} = \frac{128}{160} = 0.8.$$

Відповідь:  $X_C = 6$  кОм,  $k_p = 0.8$ .

<p><b>Приклад 1.19.</b> У колі (рис. 1.36) знайти зсув фази між струмом та напругою на частоті <math>\omega_0 = 10^6</math> рад/с. Числові значення елементів: <math>L_1 = 2</math> мГн, <math>L_2 = 2.5</math> мГн, <math>C = 0.25</math> нФ, <math>R = 1</math> кОм, взаємна індуктивність <math>M = 0.25</math> мГн.</p>	 <p style="text-align: center;">Рисунок 1.36</p>
---	---

#### Розв'язання

Розрахунки будемо здійснювати у одиницях: опір – кОм, індуктивність – мГн, ємність – нФ, взаємна індуктивність в мГн.

Оскільки струм  $I$  через індуктивності  $L_1$  та  $L_2$  протікає узгоджено, то запишемо вхідний опір кола

$$Z_{\text{ВХ}} = Z_{L1} + Z_M + R + Z_C + Z_{L2} + Z_M = Z_{L1} + R + Z_C + Z_{L2} + 2Z_M$$

Опори елементів

$$\begin{aligned} Z_{L1} &= j\omega L_1 = 1j \cdot 2 = 2j \text{ кОм}, \\ Z_{L2} &= j\omega L_2 = 1j \cdot 2.5 = 2.5j \text{ кОм}, \\ Z_M &= j\omega M = j \cdot 1 \cdot 0.25 = 0.25j \text{ кОм}, \\ Z_C &= \frac{1}{j\omega C} = \frac{1}{j \cdot 1 \cdot 0.25} = -4j \text{ кОм}. \end{aligned}$$

Підставимо числові значення у вираз для вхідного опору кола

$$\begin{aligned} Z_{\text{ВХ}} &= Z_{L1} + R + Z_C + Z_{L2} + 2Z_M = \\ &= 2j + 1 - 4j + 2.5j + 0.5j = 1 + j = \sqrt{2}e^{j45^\circ}. \end{aligned}$$

Оскільки за законом Ома

$$Z_{\text{ВХ}} = \frac{\dot{U}}{\dot{I}} = \frac{U_m e^{j\varphi_u}}{I_m e^{j\varphi_i}} = \frac{U_m}{I_m} e^{j[\varphi_u - \varphi_i]} = |Z_{\text{ВХ}}| \cdot e^{j\varphi_z}.$$

Одержали, що зсув фази між напругою та струмом на вході буде аргумент вхідного опору.

Отже, зсув фази між напругою та струмом становить  $\varphi_u - \varphi_i = 45^\circ$ .

Відповідь:  $\varphi_u - \varphi_i = 45^\circ$ .

### 1.3. Коливальні контури

**Приклад 1.20.** У послідовному контурі (рис. 1.37) знайти вхідний опір контуру на резонансній частоті та добротність контуру. Числові значення елементів кола:  $r_K = 7.5 \text{ Ом}$ ,  $R_H = 100 \text{ кОм}$ ,  $C = 1 \text{ нФ}$ ,  $L_1 = L_2 = 0.5 \text{ мГн}$ .

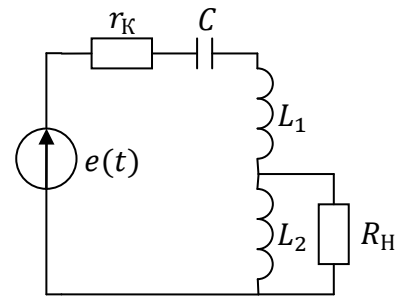


Рисунок 1.37

#### Розв'язання

Розрахунки будемо здійснювати у одиницях: опір – кОм, індуктивність – мГн, ємність – нФ.

Еквівалентна індуктивність контуру

$$L_E = L_1 + L_2 = 0.5 + 0.5 = 1 \text{ мГн.}$$

Характеристичний опір

$$\rho = \sqrt{\frac{L_E}{C}} = \sqrt{\frac{1}{1}} = 1 \text{ кОм.}$$

Коефіцієнт включення  $p$  по навантаженню

$$p = \frac{X_{L2}}{X_{L1} + X_{L2}} = \frac{L_2}{L_1 + L_2} = \frac{0.5}{0.5 + 0.5} = 0.5.$$

Еквівалентний опір навантаження, що внесений в контур

$$r_{BH} = p^2 \frac{\rho^2}{R_H} = 0.5^2 \frac{(1 \cdot 10^3)^2}{100 \cdot 10^3} = 2.5 \text{ Ом.}$$

У результаті одержимо контур, що зображений на рис. 1.38.

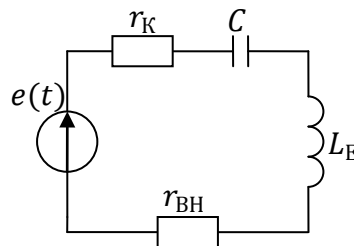


Рисунок 1.38

Добротність контуру (рис. 1.38) із урахуванням всіх опорів

$$Q = \frac{\rho}{r_K + r_{BH}} = \frac{1000}{7.5 + 2.5} = \frac{1000}{10} = 100.$$

Вхідний опір контуру на резонансі

$$r_{BX} = r_K + r_{BH} = 7.5 + 2.5 = 10 \text{ Ом.}$$

Відповідь:  $r_{BX} = 10 \text{ Ом}$ ,  $Q = 100$ .

**Приклад 1.21.** У контурі (рис. 1.39) знайти значення ємностей  $C_1$  та  $C_2$ . Вхідний опір на резонансній частоті становить  $Z_{\text{ВХ}}(\omega_0) = 40 \text{ Ом}$ . Характеристичний опір  $\rho = 2 \text{ кОм}$ . Числові значення елементів такі:  $r_{\Gamma}$ ,  $r_K$  в Ом,  $R_H$  в кОм, ємності в нФ, індуктивності в мГн.

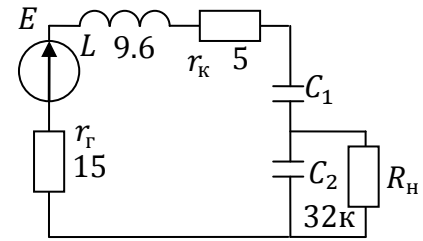


Рисунок 1.39

*Розв'язання*

Вхідний опір контуру (рис. 1.40) на резонансній частоті

$$Z_{\text{ВХ}}(\omega_0) = r_{\Gamma} + r_K + r_{\text{ВН}}$$

Звідси визначимо

$$r_{\text{ВН}} = Z_{\text{ВХ}}(\omega_0) - r_{\Gamma} - r_K = 40 - 15 - 5 = 20 \text{ Ом}.$$

З іншого боку

$$r_{\text{ВН}} = \frac{p^2 \rho^2}{R_H}.$$

Звідси визначимо коефіцієнт включення

$$p = \frac{\sqrt{r_{\text{ВН}} \cdot R_H}}{\rho} = \frac{\sqrt{20 \cdot 32000}}{2000} = 0.4.$$

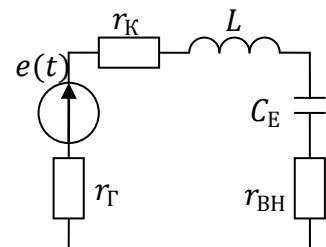


Рисунок 1.40

Отже,

$$p = \frac{X_{C2}}{X_{C1} + X_{C2}} = \frac{C_1}{C_1 + C_2} = 0.4$$

Характеристичний опір

$$\rho = \sqrt{\frac{L}{C_E}}.$$

Звідси визначимо

$$C_E = \frac{L}{\rho^2} = \frac{9.6}{2^2} = 2.4 \text{ нФ}.$$

Еквівалентна ємність

$$C_E = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} = \frac{C_1}{C_1 + C_2} \cdot C_2 = 0.4 C_2 = 2.4.$$

Звідси визначимо

$$C_2 = \frac{2.4}{0.4} = 6 \text{ нФ}.$$

Тоді

$$\frac{C_1}{C_1 + 6} = 0.4.$$

Звідси визначимо

$$C_1 = 4 \text{ нФ}.$$

Відповідь:  $C_1 = 4 \text{ нФ}$ ,  $C_2 = 6 \text{ нФ}$ .

**Приклад 1.22.** У контурі (рис. 1.41) визначити потужність, що він споживає на резонансній частоті. Амплітуда струму, що втікає у контур цій частоті становить  $I_m = 5$  мА. Числові значення елементів:  $L = 100$  мГн,  $C = 25$  нФ,  $r_1 = 20$  Ом,  $r_2 = 30$  Ом.

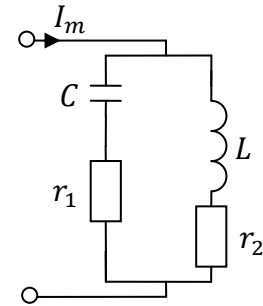


Рисунок 1.41

*Розв'язання*

Розрахунки будемо здійснювати у одиницях: опір – кОм, індуктивність – мГн, ємність – нФ, потужність – мВт.

Характеристичний опір контуру

$$\rho = \sqrt{\frac{L}{C}} = \sqrt{\frac{100}{25}} = 2 \text{ кОм.}$$

Добротність контуру

$$Q = \frac{\rho}{r_1 + r_2} = \frac{2000}{20 + 30} = \frac{2000}{50} = 40.$$

Еквівалентний опір паралельного контуру першого виду на резонансній частоті (рис. 1.42)

$$R_E = \rho Q = 2 \cdot 40 = 80 \text{ кОм.}$$

Оскільки на резонансній частоті опір контуру є активним, то і потужність на цій частоті буде активною.

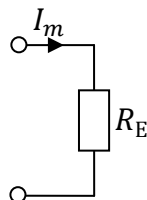


Рисунок 1.42

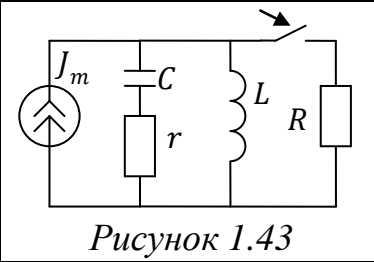
Потужність, що споживається контуром на резонансній частоті

$$P = \frac{I_m^2}{2} R_E = \frac{5^2}{2} \cdot 80 = 1 \cdot 10^3 \text{ мВт} = 1 \text{ Вт.}$$

Відповідь:  $P = 1$  Вт.



**Приклад 1.23.** У контурі (рис. 1.43) визначити як зміниться смуга пропускання, якщо паралельно до контура підключити опір  $R = 25$  кОм. На резонансній частоті добротність контуру  $Q_1 = 80$ . Опір втрат контура  $r = 10$  Ом, смуга пропускання становить 10 кГц.



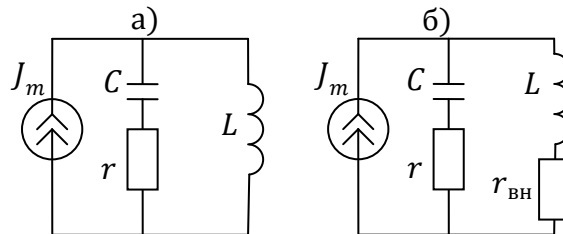
*Розв'язання*

Добротність контуру

$$Q_1 = \frac{\rho}{r}.$$

Звідси визначимо характеристичний опір

$$\rho = Q_1 \cdot r = 80 \cdot 10 = 800 \text{ Ом.}$$



*Рисунок 1.44*

Внесений опір у контур (рис. 1.44 б)

$$r_{\text{вн}} = \frac{\rho^2}{R} = \frac{800^2}{25000} = 25.6 \text{ Ом.}$$

Добротність із урахуванням внесеного опору

$$Q_2 = \frac{\rho}{r + r_{\text{вн}}} = \frac{800}{10 + 25.6} = 22.472 \cong 23.$$

Смуга пропускання

$$\Pi = \frac{f_0}{Q}.$$

Таким чином, визначимо відношення

$$\frac{\Pi_2}{\Pi_1} = \frac{\frac{f_0}{Q_2}}{\frac{f_0}{Q_1}} = \frac{Q_1}{Q_2} = \frac{80}{23} \cong 3.5 \text{ рази.}$$

Отже, смуга збільшиться в 3.5 рази.

Відповідь:  $\Pi_2/\Pi_1 = 3.5$ .

**Приклад 1.24.** Використовуючи інженерні співвідношення у контурі (рис. 1.45) отримати вираз  $U_K(\Delta f)$  та побудувати її графік. Вказати значення резонансної частоти та смуги пропускання в кГц, добротність всієї системи із урахуванням опорів, що внесені у контур. Вхідна напруга задана виразом  $e(t) = 2\cos(\omega t)$  В (амплітуда джерела не змінюється, змінюється лише частота). Числові значення елементів:  $R_\Gamma = 50$  кОм,  $R_H = 250$  кОм,  $r_K = 4$  Ом,  $L_1 = 0.25$  мГн,  $L_2 = 0.25$  мГн,  $C = 0.5$  нФ.

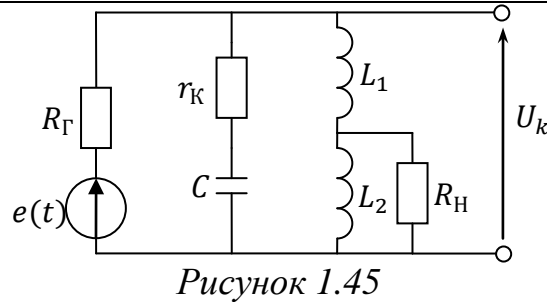


Рисунок 1.45

Розв'язання

Еквівалентна індуктивність при послідовному з'єднанні

$$L_E = L_1 + L_2 = 0.25 + 0.25 = 0.5 \text{ мГн.}$$

Резонансна частота

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L_E C}} = \frac{1}{\sqrt{0.5 \cdot 10^{-3} \cdot 0.5 \cdot 10^{-9}}} = 2 \cdot 10^6 \frac{\text{рад}}{\text{с}};$$

$$f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{2 \cdot 10^6}{2\pi} = 318.3 \text{ кГц.}$$

Характеристичний опір кола

$$\rho = \omega_0 L_E = 2 \cdot 10^6 \cdot 0.5 \cdot 10^{-3} = 1 \text{ кОм.}$$

Внесений опір збоку генератора

$$r_{BH.1} = \frac{\rho^2}{R_\Gamma} = \frac{(1 \cdot 10^3)^2}{50 \cdot 10^3} = 20 \text{ Ом.}$$

Коефіцієнт включення з боку навантаження

$$p = \frac{X_{L2}}{X_{L1} + X_{L2}} = \frac{L_2}{L_1 + L_2} = \frac{0.25}{0.25 + 0.25} = 0.5.$$

Внесений опір з боку опору навантаження

$$r_{BH.2} = p^2 \frac{\rho^2}{R_H} = 0.5^2 \frac{(1 \cdot 10^3)^2}{250 \cdot 10^3} = 1 \text{ Ом.}$$

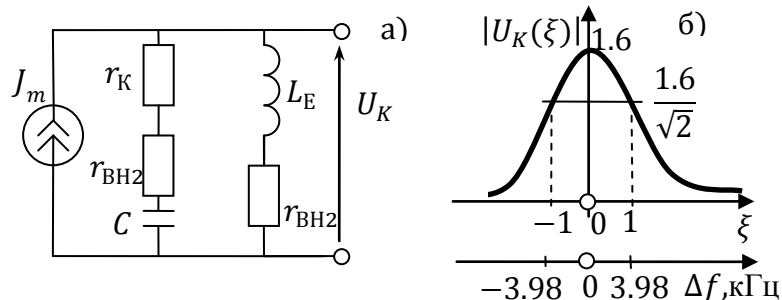


Рисунок 1.46

У результаті одержимо контур, що зображений на рис. 1.46 а.

Добротність контуру (рис. 1.46 а) із урахуванням внесених опорів

$$Q = \frac{\rho}{r_K + r_{BH.1} + r_{BH.2}} = \frac{1000}{4 + 20 + 1} = \frac{1000}{25} = 40.$$

Смуга пропускання контуру

$$\Pi = \frac{\omega_0}{Q} = \frac{2 \cdot 10^6}{40} = 5 \cdot 10^4 \frac{\text{рад}}{\text{с}};$$

$$\Pi_{Гц} = \frac{f_0}{2\pi} = \frac{318.3 \cdot 10^3}{2\pi} = 50.66 \text{ кГц}.$$

У колі (рис. 1.45) перетворимо джерело напруги у джерело струму (рис. 1.46 а) та визначимо амплітуду струму, що втікає у паралельний контур

$$J_m = \frac{E}{R_\Gamma} = \frac{2}{50 \cdot 10^3} = 0.04 \cdot 10^{-3} \text{ А} = 0.04 \text{ мА}.$$

Модуль повного опору паралельного контуру першого виду

$$|Z_K(\xi)| = \frac{R_E}{\sqrt{1 + \xi^2}} = \frac{Q\rho}{\sqrt{1 + \xi^2}} = \frac{40}{\sqrt{1 + \xi^2}}, \text{ кОм}.$$

Амплітуда напруги на контурі за законом Ома

$$U_K = J_m \cdot Z_K.$$

Модуль напруги на контурі (рис. 1.43 б)

$$|U_K(\xi)| = J_m \cdot |Z_K(\xi)| = 0.04 \cdot \frac{40}{\sqrt{1 + \xi^2}} = \frac{1.6}{\sqrt{1 + \xi^2}}, \text{ В}.$$

Узагальнена розстройка

$$\xi = 2Q \frac{\Delta f}{f_0}.$$

Звідси визначимо

$$\Delta f = \frac{\xi \cdot f_0}{2Q} = \frac{1 \cdot 318.3}{2 \cdot 40} = 3.979 \text{ кГц}.$$

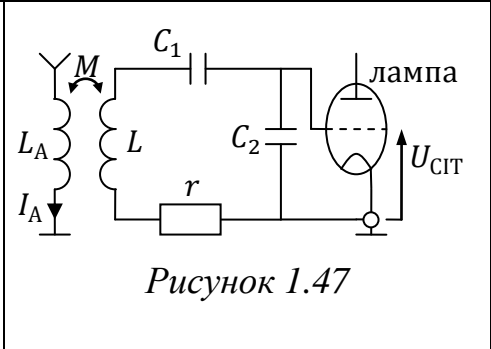
На границях смуги пропускання  $\xi = \pm 1$ . Побудуємо графіки  $U_K(\xi)$  та  $U_K(\Delta f)$  (рис. 1.46 б).

На границях смуги пропускання частоти мають значення

$$f_{П1} = f_0 + \Delta f = 318.3 + 3.98 = 322.28 \text{ кГц},$$

$$f_{П2} = f_0 - \Delta f = 318.3 - 3.98 = 314.32 \text{ кГц}.$$

**Приклад 1.25.** У контурі (рис. 1.47) на резонансній частоті  $\omega_0 = 10^6 \text{ рад/с}$  визначити амплітуду напруги на сітці лампи  $U_{\text{СІТ}}$ . Амплітуда струму у антені на цій частоті є  $I_A = 4 \text{ мкА}$ , вхідний опір лампи  $R_{\text{ВХ.Л}} = 50 \text{ кОм}$ . Числові значення елементів такі:  $r = 20 \text{ Ом}$ ,  $L = 1 \text{ мГн}$ ,  $C_1 = C_2$ , взаємна індуктивність  $M = 10 \text{ мкГн}$ .



#### Розв'язання

Знаходимо ЕРС взаємоіндукції, що вноситься в контур (рис. 1.45 а)

$$E_{\text{ВЗ}} = I_A X_{\text{ЗВ}} = I_A \omega_0 M = 4 \cdot 10^{-6} \cdot 10^6 \cdot 10 \cdot 10^{-6} = 40 \cdot 10^{-6} \text{ В} = 40 \text{ мкВ}.$$

Лампу замінимо вхідним опором  $R_{\text{ВХ.Л}}$  (рис. 1.48 а).

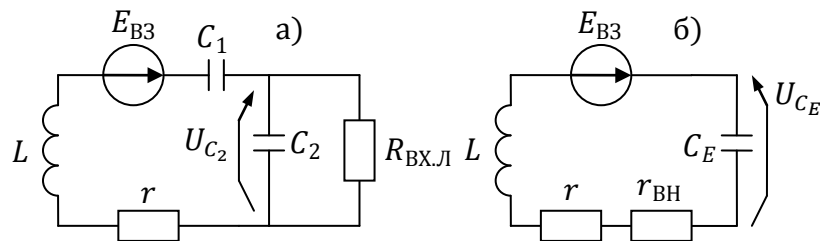


Рисунок 1.48

Характеристичний опір

$$\rho = \omega_0 L = 10^6 \cdot 1 \cdot 10^{-3} = 10^3 \text{ Ом} = 1 \text{ кОм}.$$

Коефіцієнт включення

$$p = \frac{C_1}{C_1 + C_2} = 0.5.$$

Внесений опір (рис. 1.48 б)

$$r_{\text{ВН}} = \frac{p^2 \rho^2}{R_H} = \frac{0.5 \cdot 1000^2}{50 \cdot 10^3} = 5 \text{ Ом}.$$

Добротність контуру

$$Q = \frac{\rho}{r + r_{\text{ВН}}} = \frac{1000}{20 + 5} = 50.$$

З іншого боку добротність для послідовного контуру

$$Q = \frac{U_{C_E}}{E_{\text{ВЗ}}}.$$

Звідси визначимо напругу на ємності

$$U_{C_E} = Q \cdot E_{\text{ВЗ}} = 50 \cdot 40 \cdot 10^{-6} = 2 \cdot 10^{-3} = 2 \text{ мВ}.$$

Напруга на сітці лампи

$$U_{\text{СІТ}} = U_{C_2} = U_{C_E} / 2 = 2 / 2 = 1 \text{ мВ}.$$

Відповідь:  $U_{\text{СІТ}} = 1 \text{ мВ}$ .

**Приклад 1.26.** Чи може схема (рис. 1.49) виконувати функції паралельного контуру? Яка повинна бути величина  $S$  (мА/В), щоб добротність цього контуру дорівнювала 100. Яка резонансна частота такого контуру?

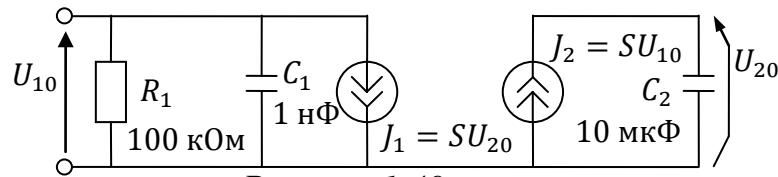


Рисунок 1.49

Розв'язання

Щоб схема (рис. 1.49) була паралельним контуром (рис. 1.50 а) необхідно, щоб наведена частина схеми (рис. 1.50 б) відносно вхідних вузлів була еквівалентна індуктивності.

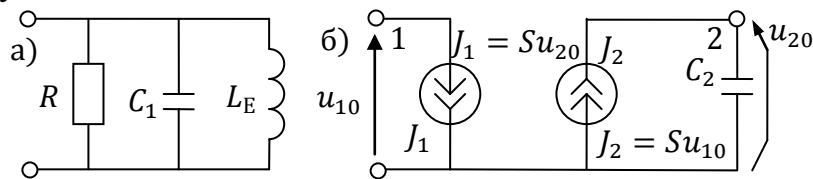


Рисунок 1.50

Система рівнянь на основі методу вузлових напруг кола (рис. 1.50 б)

$$\begin{bmatrix} -SU_{20} \\ +SU_{10} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & pC_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_{10} \\ U_{20} \end{bmatrix}.$$

Перенесемо керовані джерела та запишемо матрицю провідностей

$$Y(p) = \begin{bmatrix} 0 & S \\ -S & pC_2 \end{bmatrix}.$$

Вхідний опір

$$Z_{\text{ВХ}}(p) = \frac{\Delta_{11}}{\Delta} = \frac{pC_2}{S^2} = p \frac{C_2}{S^2}.$$

Опір  $Z_{\text{ВХ}}(p) = pC_2/S^2$  буде еквівалентний опору індуктивності, оскільки він визначається  $Z_L(p) = pL$ , тоді  $L_E = C_2/S^2$ .

Добротність паралельного контуру

$$Q = \frac{R}{\rho} = \frac{R}{\sqrt{L_E/C_1}}.$$

Звідси визначимо індуктивність

$$L_E = \frac{R^2 C_1}{Q^2} = \frac{100^2 \cdot 1}{100^2} = 1 \text{ мГн}.$$

Визначимо значення

$$S = \sqrt{\frac{C_2}{L_E}} = \sqrt{\frac{10 \cdot 10^{-6}}{1}} = \sqrt{10} \cdot 10^{-3} \frac{\text{мА}}{\text{В}}.$$

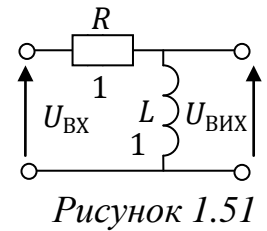
Резонансна частота

$$f_p = \frac{1}{2\pi\sqrt{L_E \cdot C_1}} = \frac{1}{2\pi\sqrt{1 \cdot 1}} = 159.2 \text{ кГц}.$$

Відповідь:  $S = \sqrt{10} \cdot 10^{-3} \text{ мА/В}$ ,  $f_p = 159.2 \text{ кГц}$ .

## 1.4. Схемні функції та прохідні чотириполюсники

**Приклад 1.27.** У колі (рис. 1.51) одержати коефіцієнт передачі за напругою, побудувати його АЧХ та ФЧХ. Розрахувати значення коефіцієнта передачі на частоті  $\omega = 10^6$  рад/с та подати його у показниковій формі. Числові значення елементів кола наведені на схемі: опори в кОм, індуктивності в мГн.



### Розв'язання

Розрахунки будемо здійснювати у одиницях: опір – кОм, індуктивність – мГн, частота – рад/мкс. Позначимо, що  $p = j\omega$ .

Коефіцієнт передачі за напругою

$$K_U = \frac{U_{\text{ВИХ}}}{U_{\text{ВХ}}} = \frac{pL}{R + pL} = \frac{p}{1 + p} \Big|_{p=j\omega} = \frac{j\omega}{1 + j\omega}.$$

Модуль та аргумент коефіцієнта передачі за напругою (рис. 1.52)

$$|K_U(\omega)| = \frac{\omega}{\sqrt{1 + \omega^2}};$$

$$\varphi_K(\omega) = -\arctg(\omega).$$

Коефіцієнта передачі за напругою на частоті  $\omega = 10^6$  рад/с = 1 рад/мкс

$$K_U(\omega = 1) = \frac{j}{1 + j} = \frac{e^{j90^\circ}}{\sqrt{2}e^{j45^\circ}} = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{j45^\circ}.$$

Модуль та аргумент коефіцієнту передачі за напругою (рис. 1.52).

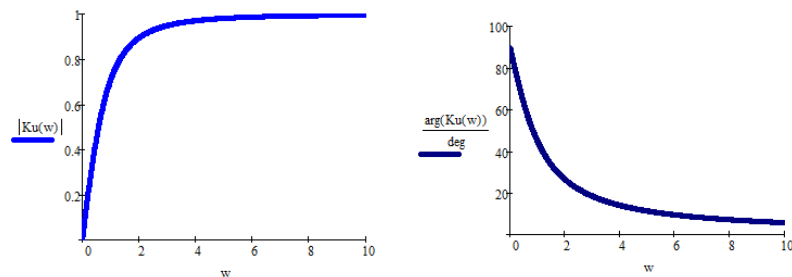


Рисунок 1.52

Відповідь:  $K_U(\omega) = j\omega/(1 + j\omega)$ ,  $K_U(\omega = 1) = e^{j45^\circ}/\sqrt{2}$ .

**Приклад 1.28.** У колі (рис. 1.53) знайти коефіцієнт передачі за струмом, побудувати його АЧХ та ФЧХ. Розрахувати значення коефіцієнта передачі на частоті  $\omega = 10^6$  рад/с та подати його у показниковій формі. Числові значення елементів наведені на схемі: опори в кОм, індуктивності в мГн.

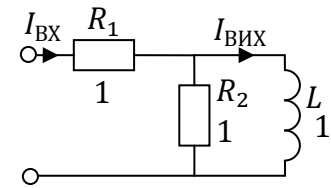


Рисунок 1.53

#### Розв'язання

Розрахунки будемо здійснювати у одиницях: опір – кОм, індуктивність – мГн, частота – рад/мкс. Позначимо, що  $p = j\omega$ .

За формулою дільника струму

$$I_{\text{ВИХ}} = \frac{I_{\text{ВХ}} \cdot R_2}{R_2 + pL} = \frac{I_{\text{ВХ}}}{1 + p}$$

Із матриці визначаємо коефіцієнт передачі за струмом

$$K_I = \frac{I_{\text{ВИХ}}}{I_{\text{ВХ}}} = \frac{1}{1 + p}.$$

Залежність коефіцієнта передачі за напругою від частоти

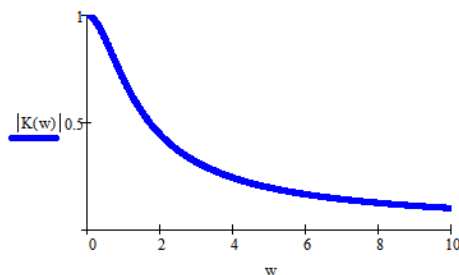
$$K_I(\omega) = \frac{1}{1 + j\omega} = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2}} e^{-j \arctg(\omega)}.$$

Модуль та аргумент коефіцієнта передачі за струмом (рис. 1.54)

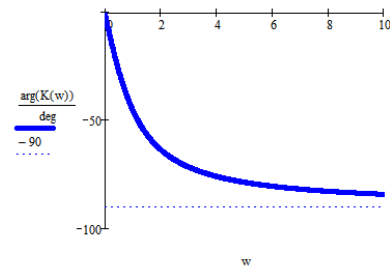
$$|K_I(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2}}; \quad \varphi_K(\omega) = -\arctg(\omega).$$

Коефіцієнта передачі за струмом на частоті  $\omega = 10^6$  рад/с

$$K_I(\omega = 10^6) = \frac{1}{1 + j} = \frac{1}{\sqrt{2} e^{j45^\circ}} = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-j45^\circ}.$$



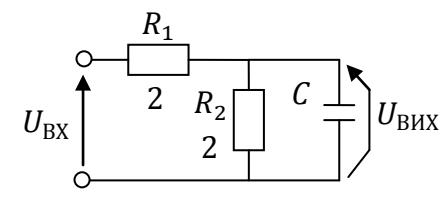
а)



б)

Рисунок 1.54

Відповідь:  $K_I(\omega) = 1/(1 + j\omega)$ ,  $K_I(\omega = 1) = e^{-j45^\circ}/\sqrt{2}$ .

<p><b>Приклад 1.29.</b> У колі (рис. 1.55) визначити значення ємності, при якому на частоті <math>\omega = 1</math> рад/мкс модуль коефіцієнта передачі за напругою становить <math> K_U(\omega)  = 1/2\sqrt{2}</math>. Числові значення елементів наведені на схемі: опори в кОм, ємності в нФ.</p>	 <p style="text-align: center;">Рисунок 1.55</p>
--	--

*Розв'язання*

Розрахунки будемо здійснювати у одиницях: опір – кОм, ємність – нФ. Матриця провідностей

$$Y = \begin{bmatrix} g_1 & -g_1 \\ -g_1 & g_1 + g_2 + j\omega C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5 & -0.5 \\ -0.5 & 1 + jC \end{bmatrix}.$$

Із матриці визначаємо коефіцієнт передачі за напругою

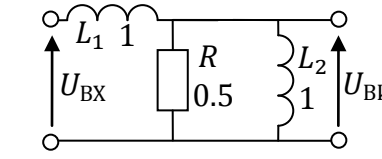
$$K_U = \frac{U_{\text{ВИХ}}}{U_{\text{ВХ}}} = \frac{\Delta_{12}}{\Delta_{11}} = \frac{(-1)^{1+2}(-0.5)}{1 + jC} = \frac{0.5}{1 + jC} = \frac{0.5}{\sqrt{1 + C^2}} e^{-j \arctg(C)}.$$

Прирівняємо вираз модуля коефіцієнта передачі  $|K_U(\omega)|$  до  $1/2\sqrt{2}$

$$\frac{0.5}{\sqrt{1 + C^2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}.$$

Звідси визначаємо значення ємності  $C = 1$  нФ.

Відповідь:  $C = 1$  нФ.

<p><b>Приклад 1.30.</b> У колі (рис. 1.56) визначити частоту <math>\omega</math>, на якій значення аргументу коефіцієнта передачі за напругою дорівнює <math>45^\circ</math>. Числові значення елементів наведені на схемі: опори – кОм, індуктивності – мГн.</p>	 <p style="text-align: center;">Рисунок 1.56</p>
---	---

*Розв'язання*

Розрахунки будемо здійснювати у одиницях: опір – кОм, індуктивність – мГн. Матриця провідностей

$$Y = \begin{bmatrix} \frac{1}{pL_1} & -\frac{1}{pL_1} \\ -\frac{1}{pL_1} & g + \frac{1}{pL_1} + \frac{1}{pL_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{p} & -\frac{1}{p} \\ -\frac{1}{p} & 2 + \frac{2}{p} \end{bmatrix}.$$

Із матриці визначимо коефіцієнт передачі за напругою

$$K_U = \frac{\Delta_{12}}{\Delta_{11}} = \frac{(-1)^{1+2}(-\frac{1}{p})}{(-1)^{1+1}(2 + \frac{2}{p})} = \frac{\frac{1}{p}}{2 + \frac{2}{p}} = \frac{0.5}{1 + p}.$$

Залежність коефіцієнта передачі за напругою від частоти

$$K_U(\omega) = \frac{0.5j\omega}{1 + j\omega} = \frac{0.5\omega \cdot e^{j90^\circ}}{\sqrt{1 + \omega^2} e^{j \arctg(\omega)}} = \frac{0.5\omega}{\sqrt{1 + \omega^2}} e^{j(90^\circ - \arctg(\omega))}.$$

Із виразу ФЧХ запишемо  $90^\circ - \arctg(\omega) = 45^\circ$ . Звідси визначимо  $\arctg(\omega) = 90^\circ - 45^\circ = 45^\circ$ . Отже, із рівняння бачимо, що  $\omega = 1$  рад/мкс.

Відповідь:  $\omega = 1$  рад/мкс.



**Приклад 1.31.** У колі (рис. 1.57) в усталеному гармонічному режимі знайти коефіцієнт передачі за напругою. Чотириполіусник має такі Y-параметри

$$Y = \begin{bmatrix} 0,5 & 0 \\ -2,5 & 1,5 \end{bmatrix} \text{ мСім.}$$

Побудувати АЧХ та ФЧХ. Розрахувати значення коефіцієнт передачі на частоті  $\omega = 10^6$  рад/с. Числові значення на схемі: опори в кОм, ємності в нФ, напруги в В.

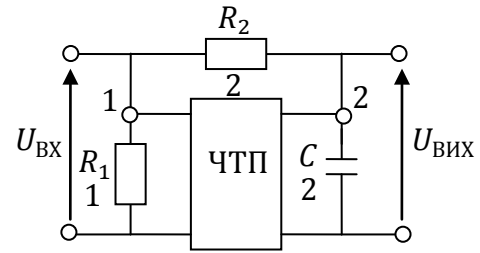


Рисунок 1.57

#### Розв'язання

Запишемо Y-матрицю чотириполіусника

$$Y = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,5 & 0 \\ -2,5 & 1 \end{bmatrix}.$$

Провідності елементів

$$g_1 = \frac{1}{R_1} = \frac{1}{1} = 1 \text{ кОм}; \quad g_2 = \frac{1}{R_2} = \frac{1}{2} = 0,5 \text{ кОм}; \quad Y_C(p) = pC = 2p.$$

Матриця провідностей всього кола

$$Y = \begin{bmatrix} g_1 + g_2 + Y_{11} & -g_2 + Y_{12} \\ -g_2 + Y_{21} & g_2 + pC + Y_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + 0,5 + 0,5 & -0,5 + 0 \\ -0,5 - 2,5 & 0,5 + 2p + 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -0,5 \\ -3 & 2 + 2p \end{bmatrix}.$$

Із матриці визначимо коефіцієнт передачі за напругою

$$K_U = \frac{\Delta_{12}}{\Delta_{11}} = \frac{(-1)^{1+2}(-3)}{2 + 2p} = \frac{1,5}{p + 1}.$$

Залежність коефіцієнта передачі за напругою від частоти (рис. 1.58)

$$K_U(\omega) = \frac{1,5}{j\omega + 1} = \frac{1,5}{\sqrt{1 + \omega^2}} \cdot e^{-j \arctg(\omega)}.$$

Коефіцієнт передачі на частоті  $\omega = 10^6$  рад/с.

$$K_U(\omega = 1) = \frac{1,5}{j + 1} = \frac{1,5}{\sqrt{2} \cdot e^{j45^\circ}} = \frac{3}{2\sqrt{2}} e^{-j45^\circ}.$$

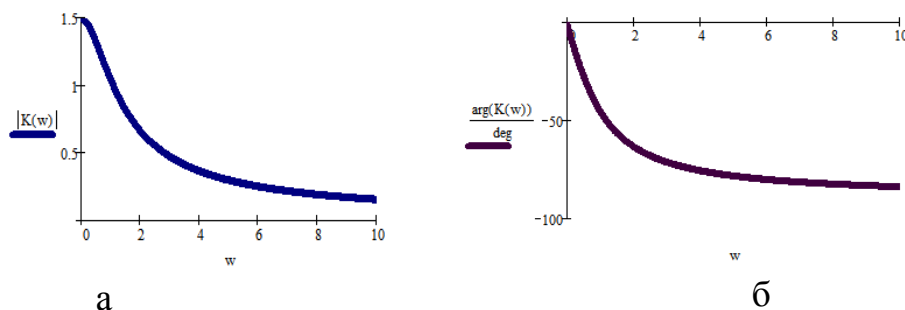


Рисунок 1.58

Відповідь:  $K_U = 1,5/(1 + j\omega)$ ;  $K_U(\omega = 1) = 1,5e^{-j45^\circ}/\sqrt{2}$ .

**Приклад 1.32.** У колі (рис. 1.59) при замкненому ключі визначити струм джерела  $J$ . Коло споживає потужність 16 мВт.  $Y$  - параметри ЧТП:

$$Y = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} \text{ мСім.}$$

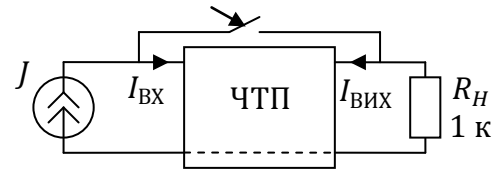


Рисунок 1.59

*Розв'язання*

Зобразимо схему заміщення ЧТП у вигляді П-подібної схеми (рис. 1.60 а)

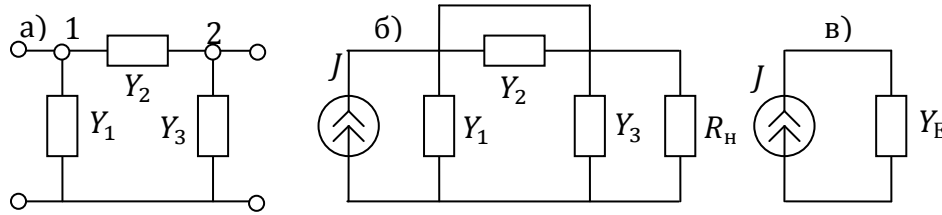


Рисунок 1.60

Матриця провідностей П-подібного ЧТП (рис. 1.60 а)

$$Y = \begin{vmatrix} Y_1 + Y_2 & -Y_2 \\ -Y_2 & Y_3 + Y_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} \text{ мСім.}$$

Визначимо параметри елементів схеми заміщення П-подібного ЧТП

$$Y_2 = 1 \text{ мСім};$$

$$Y_1 + Y_2 = 3, Y_1 = 3 - Y_2 = 3 - 1 = 2 \text{ мСім};$$

$$Y_3 + Y_2 = 2, Y_3 = 2 - Y_2 = 2 - 1 = 1 \text{ мСім.}$$

Еквівалентна провідність схеми (рис. 1.60 б)

$$Y_E = Y_1 + Y_3 + g_H = 2 + 1 + 1 = 4 \text{ мСім.}$$

Потужність споживачів (рис. 1.60 в)

$$P_{\text{СП}} = J^2 Z_E = \frac{J^2}{Y_E}.$$

Звідси визначимо струм

$$J = \sqrt{P_{\text{СП}} \cdot Y_E} = \sqrt{16 \cdot 4} = 4 \cdot 2 = 8 \text{ мА.}$$

Відповідь:  $J = 8 \text{ мА.}$

**Приклад 1.33.** У схемі (рис. 1.61) визначити струм  $I_{\text{вих}}$ . Y-параметри ЧТП при наведених напрямках струмів

$$Y = \begin{bmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \text{ мСім.}$$

Всі опори в кОм, струми – мА, напруги – В.



Рисунок 1.61

*Розв'язання*

Замінімо чотирьохполіусник ЧТП схемою заміщення у вигляді П-подібної схеми (рис. 1.62)

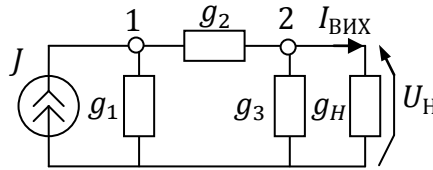


Рисунок 1.62

Складемо матрицю провідностей кола (рис. 1.62) за МВН

$$G = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} + g_H \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 4 + 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 6 \end{bmatrix} \text{ мСім.}$$

Визначники

$$\Delta = \begin{vmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 6 \end{vmatrix} = 6 \cdot 6 - 2 \cdot 2 = 36 - 4 = 32;$$

Коефіцієнт передачі за струмом

$$K_I = \frac{I_{\text{вих}}}{I_{\text{вх}}} = \frac{\Delta_{12}}{\Delta} \cdot g_H = \frac{(-1)^{1+2} \cdot (-2)}{32} \cdot 2 = \frac{1}{8}.$$

Звідси визначимо

$$I_{\text{вих}} = I_{\text{вх}} \cdot K_I = 12 \cdot \frac{1}{8} = 1.5 \text{ мА.}$$

2 спосіб

За МВН (рис. 1.62)

$$\begin{bmatrix} J \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1 + g_2 & g_2 \\ g_2 & g_2 + g_3 + g_H \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_{10} \\ U_{20} \end{bmatrix}.$$

$$\begin{bmatrix} 12 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 4 + 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_{10} \\ U_{20} \end{bmatrix}.$$

Визначники

$$\Delta = \begin{vmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 6 \end{vmatrix} = 6 \cdot 6 - 2 \cdot 2 = 36 - 4 = 32;$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 12 & -2 \\ 0 & 6 \end{vmatrix} = 12 \cdot 6 = 72; \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 6 & 12 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = 2 \cdot 12 = 24.$$

За методом Крамера

$$U_{10} = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{72}{32} = 2.25 \text{ В}; \quad U_{20} = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{24}{32} = 0.75 \text{ В} = U_H.$$

За законом Ома  $I_{\text{вих}} = U_H \cdot g_H = 0.75 \cdot 2 = 1.5 \text{ мА.}$

Відповідь:  $I_{\text{вих}} = 1.5 \text{ мА.}$

**Приклад 1.34.** У схемі (рис. 1.63) знайти коефіцієнт передачі за напругою  $K_u = U_{23}/U_{10}$ ,  $S = 8 \text{ мА/В}$ .

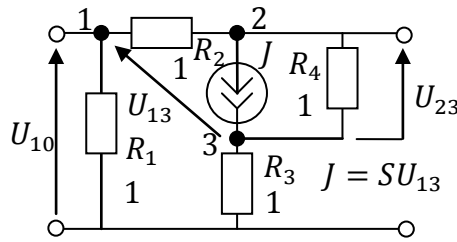


Рисунок 1.63

Розв'язання

Розрахунки будемо здійснювати у одиницях: опір – кОм, провідність – мСім, струм – мА, напруга – В.

Система рівнянь на основі МВН

$$\begin{bmatrix} 0 \\ -J \\ +J \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1 + g_2 & -g_2 & 0 \\ -g_2 & g_2 + g_4 & -g_4 \\ 0 & -g_4 & g_3 + g_4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_{10} \\ U_{20} \\ U_{30} \end{bmatrix}.$$

Виразимо кероване джерело через вузлові напруги

$$J = SU_{13} = S(U_{10} - U_{30}).$$

Підставимо вираз джерела струму у систему

$$\begin{bmatrix} 0 \\ -S(U_{10} - U_{30}) \\ +S(U_{10} - U_{30}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1 + g_2 & -g_2 & 0 \\ -g_2 & g_2 + g_4 & -g_4 \\ 0 & -g_4 & g_3 + g_4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_{10} \\ U_{20} \\ U_{30} \end{bmatrix}.$$

Перенесемо кероване джерело із вектора задаючих змінних у вектор шуканих та внесемо їх у матрицю провідностей

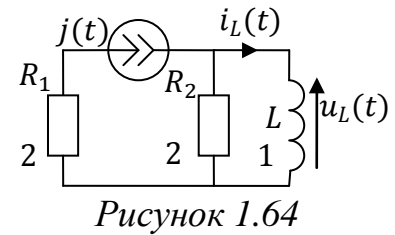
$$\begin{aligned} G &= \begin{bmatrix} g_1 + g_2 & -g_2 & 0 \\ -g_2 + S & g_2 + g_4 & -g_4 - S \\ -S & -g_4 & g_3 + g_4 + S \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 + 8 & 2 & -1 - 8 \\ -8 & -1 & 2 + 8 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 7 & 2 & -9 \\ -8 & -1 & 10 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Коефіцієнт передачі за напругою

$$\begin{aligned} K_u &= \frac{U_{23}}{U_{10}} = \frac{U_{20} - U_{30}}{U_{10}} = \frac{\Delta_{12} - \Delta_{13}}{\Delta_{11}} = \\ &= \frac{(-1)^{1+2} \begin{bmatrix} 7 & -9 \\ -8 & 10 \end{bmatrix} - (-1)^{1+3} \begin{bmatrix} 7 & 2 \\ -8 & -1 \end{bmatrix}}{(-1)^{1+1} \begin{bmatrix} 2 & -9 \\ -1 & 10 \end{bmatrix}} = \\ &= \frac{-(70 - 72) - (-7 + 16)}{20 - 9} = \frac{2 - 9}{11} = -\frac{7}{11}. \end{aligned}$$

## 1.5. Перехідні процеси

**Приклад 1.35.** У колі (рис. 1.64) операторним методом знайти напругу  $u_L(t)$  та струм  $i_L(t)$  на індуктивності, побудувати їх графіки. Струм джерела струму  $j(t) = 10 \cdot e^{-2t}$  мА,  $t \geq 0$ . Числові значення елементів: опори – кОм, індуктивності – мГн.



*Розв'язання*

Струм джерела у операторній формі

$$J(p) = \frac{10}{p + 2}.$$

За формулою дільника струму

$$I_L(p) = J(p) \cdot \frac{R_2}{R_2 + pL} = \frac{10}{p + 2} \cdot \frac{1}{1 + p} = \frac{10}{(p + 2)(p + 1)}.$$

Операторний струм на індуктивності за теоремою розкладання

$$I_L(p) = \frac{10}{(p + 2)(p + 1)} = \frac{A_1}{p + 1} + \frac{A_2}{p + 2}.$$

Згідно теореми розкладання коефіцієнти визначаються

$$A_1 = \left. \frac{10}{(p + 2)} \right|_{p=-1} = \frac{10}{(-1 + 2)} = \frac{10}{1} = 10;$$

$$A_2 = \left. \frac{10}{(p + 1)} \right|_{p=-2} = \frac{10}{(-2 + 1)} = \frac{10}{-1} = -10.$$

Тоді маємо

$$I_L(p) = \frac{10}{p + 1} - \frac{10}{p + 2}.$$

Оригінал такого зображення є струм (рис. 1.65)

$$i_L(t) = 10e^{-t} - 10e^{-2t} \text{ мА.}$$

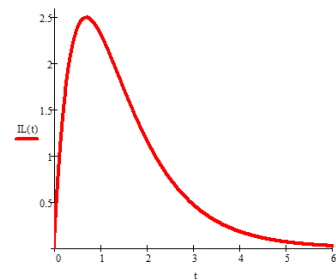


Рисунок 1.65

Напруга на індуктивності (рис. 1.66)

$$u_L(t) = L \frac{di_L(t)}{dt} = 20e^{-2t} - 10e^{-t} \text{ В.}$$

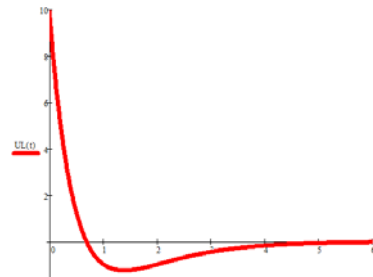


Рисунок 1.66

Відповідь:  $i_L(t) = 10e^{-t} - 10e^{-2t}$  мА,  $u_L(t) = 20e^{-2t} - 10e^{-t}$  В.

**Приклад 1.36.** У колі (рис. 1.67) операторним методом знайти напругу  $u_c(t)$  та струм  $i_c(t)$  на ємності, побудувати їх графік. Напруга джерела  $e(t) = 12 \cdot e^{-3t}$  В,  $t \geq 0$ . Числові значення елементів кола: опори – кОм, ємності – нФ.

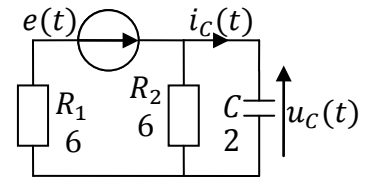


Рисунок 1.67

### Розв'язання

Операторна вхідна напруга

$$E(p) = \frac{12}{p + 3}.$$

У колі (рис. 1.67) перетворимо джерело напруги у джерело струму (рис. 1.68 а) та визначимо еквівалентні параметри

$$J(p) = \frac{E(p)}{R_1} = \frac{2}{p + 3}; \quad R_{12} = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} = \frac{6 \cdot 6}{6 + 6} = 3 \text{ кОм}.$$

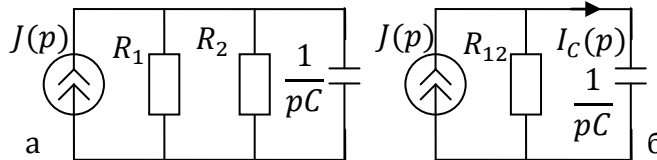


Рисунок 1.68

За формулою дільника струму (рис. 1.68 б)

$$I_c(p) = J(p) \cdot \frac{R_{12}}{R_{12} + \frac{1}{pC}} = \frac{2}{p + 3} \cdot \frac{6p}{3 + 2p} = \frac{6p}{(p + 3)(p + 1.5)}.$$

Операторна напруга на ємності за законом Ома та теоремою розкладання

$$U_c(p) = I_c(p) \cdot \frac{1}{pC} = \frac{6p}{(p + 3)(p + 1.5)} \cdot \frac{1}{2p} = \frac{3}{(p + 3)(p + 1.5)} = \frac{B_1}{p + 1.5} + \frac{B_2}{p + 3}.$$

Коефіцієнти згідно теореми розкладання

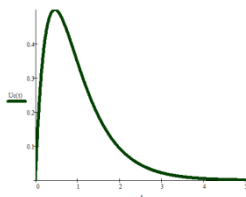
$$B_1 = \left. \frac{3}{(p + 3)} \right|_{p=-1.5} = \frac{3}{(-1.5 + 3)} = 2; \quad B_2 = \left. \frac{3}{(p + 1.5)} \right|_{p=-3} = \frac{3}{(-3 + 1.5)} = -2.$$

У результаті одержимо напругу (рис. 1.69 а)

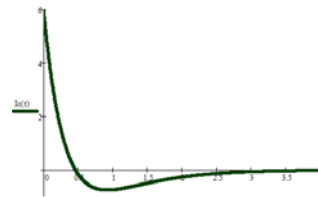
$$U_c(p) = \frac{2}{p + 1.5} - \frac{2}{p + 3} \rightarrow u_c(t) = 2e^{-1.5t} - 2e^{-3t}.$$

Струм в ємності (рис. 1.69 б)

$$i_c(t) = C \frac{du_c(t)}{dt} = -6e^{-1.5t} + 12e^{-3t}.$$



а



б

Рисунок 1.69

**Відповідь:**  $i_c(t) = 12e^{-3t} - 6e^{-1.5t}$ ,  $u_c(t) = 2e^{-1.5t} - 2e^{-3t}$ .

**Приклад 1.37.** У колі (рис. 1.70) визначити напругу  $u_{\text{ВІХ}}(t)$  та побудувати її графік. Вхідна напруга має тривалість  $\tau_{\text{ІМП}} = 2$  мкс та амплітуду  $E = 1$  В. Значення елементів:  $R = 1$  кОм,  $C = 1$  нФ.

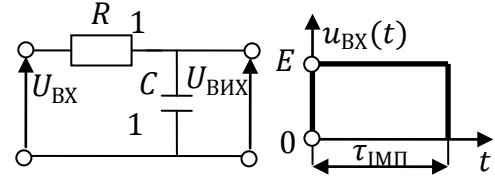


Рисунок 1.70

### Розв'язання

За формулою дільника напруги

$$U_{\text{ВІХ}} = \frac{U_{\text{ВІХ}} \cdot 1/pC}{R + 1/pC} = \frac{U_{\text{ВІХ}}}{1 + pRC} = \frac{U_{\text{ВІХ}}}{1 + p}.$$

Операторний коефіцієнт передачі за напругою

$$K(p) = \frac{U_{\text{ВІХ}}}{U_{\text{ВІХ}}} = \frac{1}{1 + p}.$$

Часові характеристики (рис. 1.71)

$$g(t) = L^{-1}\{K(p)\} = L^{-1}\left\{\frac{1}{1 + p}\right\} = e^{-t}.$$

$$h(t) = L^{-1}\left\{\frac{K(p)}{p}\right\} = L^{-1}\left\{\frac{1}{(1 + p)p}\right\} = L^{-1}\left\{\frac{1 + p - p}{(1 + p)p}\right\} = L^{-1}\left\{\frac{1}{p} - \frac{1}{p + 1}\right\} = 1 - e^{-t}.$$

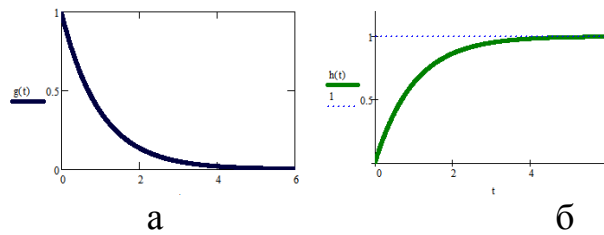


Рисунок 1.71

Вхідну напругу прямокутної форми можна одержати у вигляді різниці двох функцій Хевісайда (рис. 1.72).

$$u_{\text{ВІХ}}(t) = E[1(t) - 1(t - \tau_{\text{ІМП}})].$$

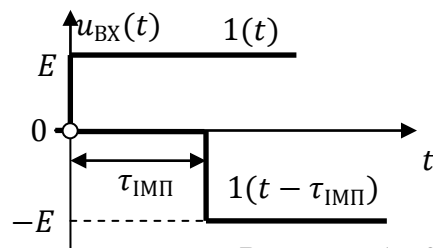


Рисунок 1.72

Вихідна напруга (рис. 1.73)

$$u_{\text{ВІХ}}(t) = E[h(t) \cdot 1(t) - h(t - 2) \cdot 1(t - 2)].$$

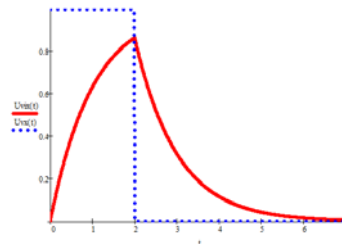
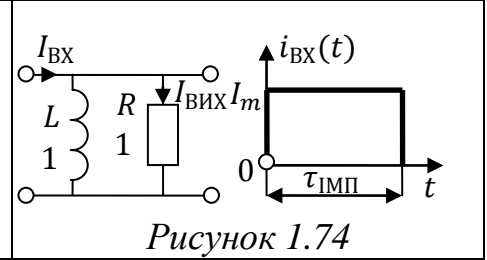


Рисунок 1.73

**Відповідь:**  $g(t) = e^{-t}$ ;  $h(t) = 1 - e^{-t}$ ;  $u_{\text{ВІХ}}(t) = h(t) \cdot 1(t) - h(t - 2) \cdot 1(t - 2)$ .

**Приклад 1.38.** У колі (рис. 1.74) визначити струм  $i_{\text{ВІХ}}(t)$ , часові характеристики та побудувати їх графіки. Вхідний струм тривалістю  $\tau_{\text{ІМП}} = 3$  мкс та амплітудою  $I_m = 2$  мА. Числові значення:  $R = 1$  кОм,  $L = 1$  мГн.



Розв'язання

За формулою дільника струму

$$I_{\text{ВІХ}} = \frac{I_{\text{ВІХ}} \cdot pL}{R + pL}.$$

Операторний коефіцієнт передачі за струмом

$$K_I(p) = \frac{I_{\text{ВІХ}}}{I_{\text{ВІХ}}} = \frac{pL}{R + pL} = \frac{p}{1 + p}.$$

Імпульсна характеристика (рис. 1.77 а)

$$g(t) = L^{-1}\{K_I(p)\} = L^{-1}\left\{\frac{p}{p+1}\right\} = L^{-1}\left\{\frac{p+1-1}{p+1}\right\} = L^{-1}\left\{1 - \frac{1}{p+1}\right\} = \delta(t) - e^{-t}.$$

Перехідна характеристика (рис. 1.77 б)

$$h(t) = L^{-1}\left\{\frac{K_I(p)}{p}\right\} = L^{-1}\left\{\frac{1}{1+p}\right\} = e^{-t}.$$

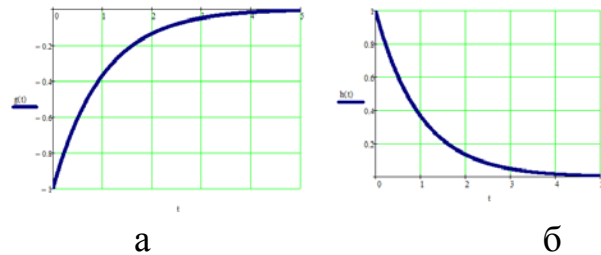


Рисунок 1.75

Струм прямокутної форми можна одержати у вигляді різниці двох функцій Хевісайда (рис. 1.76).

$$i_{\text{ВІХ}}(t) = I_m[1(t) - 1(t - \tau_{\text{ІМП}})].$$

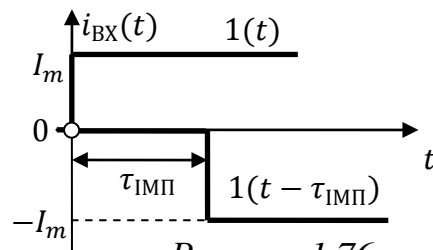


Рисунок 1.76

Струм на виході (рис. 1.77)

$$i_{\text{ВІХ}}(t) = I_m[h(t) \cdot 1(t) - h(t - 3) \cdot 1(t - 3)], \text{ мА.}$$

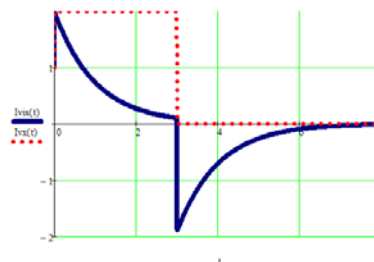
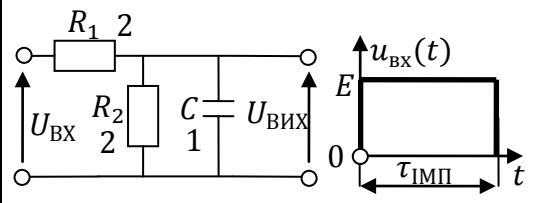


Рисунок 1.77

**Відповідь:**  $g(t) = e^{-t}$ ;  $h(t) = 1 - e^{-t}$ ;  $i_{\text{ВІХ}}(t) = 2h(t) \cdot 1(t) - 2h(t - 3) \cdot 1(t - 3)$ .



<p><b>Приклад 1.39.</b> У колі (рис. 1.78) визначити напругу <math>u_{\text{вих}}(t)</math>, часові характеристики та побудувати їх графік. Вхідна напруга тривалістю <math>\tau_{\text{ИМП}} = 2</math> мкс та амплітудою <math>E = 2</math> В. Опори в кОм, ємності в нФ, напруга в В.</p>	 <p style="text-align: center;">Рисунок 1.78</p>
--	--

*Розв'язання*

Матриця провідностей за МВН (рис. 1.78)

$$Y(p) = \begin{bmatrix} g_1 & -g_1 \\ -g_1 & g_1 + g_2 + pC \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5 & -0.5 \\ -0.5 & 1 + p \end{bmatrix}.$$

Коефіцієнт передачі за напругою

$$K_U(p) = \frac{\Delta_{12}}{\Delta_{11}} = \frac{(-1)^{1+2} \cdot (-0.5)}{(-1)^{1+1} \cdot (1 + p)} = \frac{0.5}{p + 1}.$$

Часові характеристики (рис. 1.79)

$$g(t) = L^{-1}\{K_U(p)\} = L^{-1}\left\{\frac{0.5}{p + 1}\right\} = 0.5e^{-t};$$

$$h(t) = L^{-1}\left\{\frac{K_U(p)}{p}\right\} = L^{-1}\{H(p)\} = L^{-1}\left\{\frac{0.5}{p(p + 1)}\right\} = 0.5 - 0.5e^{-t}.$$

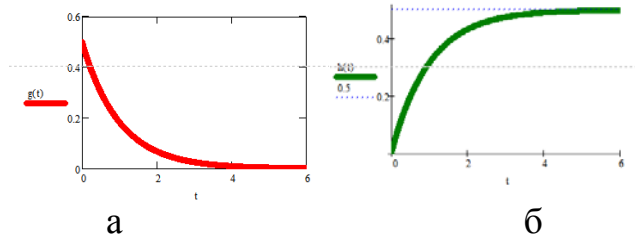


Рисунок 1.79

За теоремою розкладання

$$H(p) = \frac{0.5}{p(p + 1)} = \frac{A_1}{p} + \frac{A_2}{p + 1} = \frac{0.5}{p} - \frac{0.5}{p + 1} \leftrightarrow h(t) = 0.5 - 0.5e^{-t}.$$

Коефіцієнти при лишках функції у особливих точках

$$A_1 = \frac{0.5}{p + 1} \Big|_{p=0} = \frac{0.5}{1} = 0.5; \quad A_2 = \frac{0.5}{p} \Big|_{p=-1} = \frac{0.5}{-1} = -0.5.$$

Напруга на вході  $u_{\text{BX}}(t) = E[1(t) - 1(t - \tau_{\text{ИМП}})]$ .

Напруга на виході (рис. 1.80)

$$u_{\text{вих}}(t) = E[h(t)1(t) - h(t - 2) \cdot 1(t - 2)] =$$

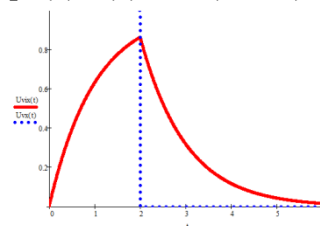


Рисунок 1.80

Відповідь:

$$g(t) = 0.5e^{-t}; \quad h(t) = 0.5 - 0.5e^{-t}; \quad u_{\text{вих}}(t) = h(t) \cdot 1(t) - h(t - 2) \cdot 1(t - 2).$$

**Приклад 1.40.** У колі (рис. 1.81) знайти напругу на виході  $u_{\text{вих}}(t)$ , часові характеристики та побудувати їх графіки. Стала часу кола  $\tau_K = 0.5$  мкс. Вхідна напруга  $u_{\text{вх}}(t) = 2e^{-2t}$  В,  $t \geq 0$ .

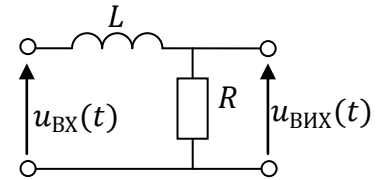


Рисунок 1.81

*Розв'язання*

Коефіцієнт передачі кола у операторній формі

$$K(p) = \frac{U_{\text{вих}}}{U_{\text{вх}}} = \frac{R}{R + pL} = \frac{R/L}{R/L + p} = \frac{1/\tau_K}{1/\tau_K + p} = \frac{2}{2 + p}.$$

Імпульсна характеристика (рис. 1.58)

$$g(t) = L^{-1}\{K(p)\} = L^{-1}\left\{\frac{2}{2 + p}\right\} = 2e^{-2t}.$$

1 спосіб

Напруга на виході часовим методом через імпульсну характеристику

$$\begin{aligned} u_{\text{вих}}(t) &= u_{\text{вх}}(t) * g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u_{\text{вх}}(\tau) \cdot g(t - \tau) d\tau = \int_0^t 2e^{-2\tau} \cdot 2e^{-2(t-\tau)} d\tau = \\ &= 4e^{-2t} \int_0^t d\tau = 4te^{-2t} \text{ В.} \end{aligned}$$

Перехідна характеристика (рис. 1.82)

$$\begin{aligned} h(t) &= L^{-1}\left\{\frac{K(p)}{p}\right\} = L^{-1}\left\{\frac{1}{p} \cdot \frac{2}{(2 + p)}\right\} = L^{-1}\left\{\frac{2 + p - p}{p \cdot (2 + p)}\right\} = L^{-1}\left\{\frac{1}{p} - \frac{1}{2 + p}\right\} = \\ &= 1 - e^{-2t}. \end{aligned}$$

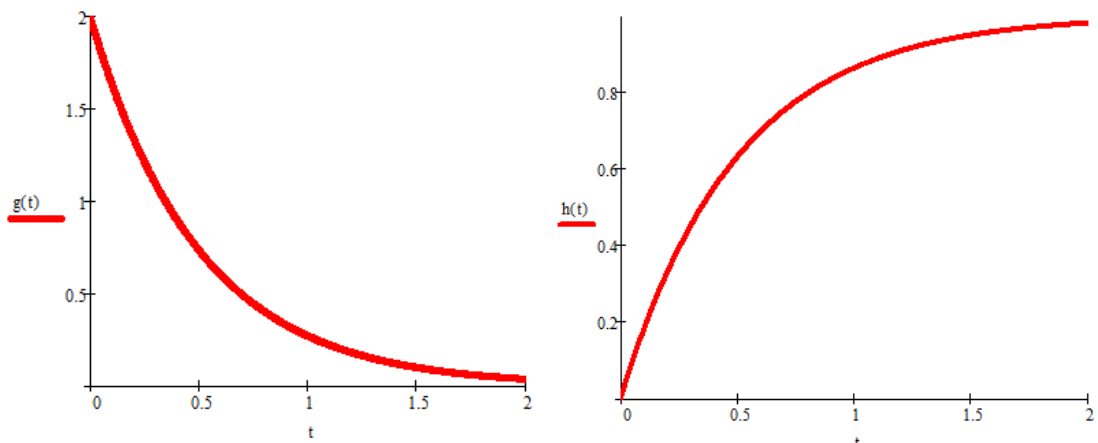


Рисунок 1.82

### 2 спосіб

Напруга на виході часовим методом через перехідну характеристику

$$\begin{aligned}
 u_{\text{вих}}(t) &= \dot{u}_{\text{вх}}(t) * h(t) = u_{\text{вх}}(0) \cdot h(t) + \int_{-\infty}^{\infty} \dot{u}_{\text{вх}}(\tau) \cdot h(t - \tau) d\tau = \\
 &= 2 \cdot (1 - e^{-2t}) + \int_0^t -4e^{-2\tau} \cdot (1 - e^{-2(t-\tau)}) d\tau = 2 \cdot (1 - e^{-2t}) - \\
 &- 4 \int_0^t e^{-2\tau} \cdot (1 - e^{-2t} e^{2\tau}) d\tau = 2 \cdot (1 - e^{-2t}) - 4 \int_0^t (e^{-2\tau} - e^{-2t} e^{2\tau}) d\tau = \\
 &= 2(1 - e^{-2t}) - 4 \int_0^t (e^{-2\tau} - e^{-2t}) d\tau = 2(1 - e^{-2t}) - 4 \left( -\frac{1}{2} e^{-2\tau} - e^{-2t} \tau \right) \Big|_0^t = \\
 &= 2(1 - e^{-2t}) - 2(-(e^{-2t} - 1) - 2e^{-2t}t) = 2(1 - e^{-2t}) - 2(1 - e^{-2t}) + 4te^{-2t} \\
 &= \\
 &= 4te^{-2t} \text{ В.}
 \end{aligned}$$

### 3 спосіб

Вхідна напруга у операторній формі

$$u_{\text{вх}}(p) = \frac{2}{p + 2}.$$

Напруга на виході у операторній області

$$u_{\text{вих}}(p) = u_{\text{вх}}(p) \cdot K(p) = \frac{2}{p + 2} \cdot \frac{2}{2 + p} = \frac{4}{(p + 2)^2}.$$

За таблицею Лапласа

$$u_{\text{вих}}(t) = 4te^{-2t} \text{ В.}$$

Вихідна напруга подана на рис. 1.83.

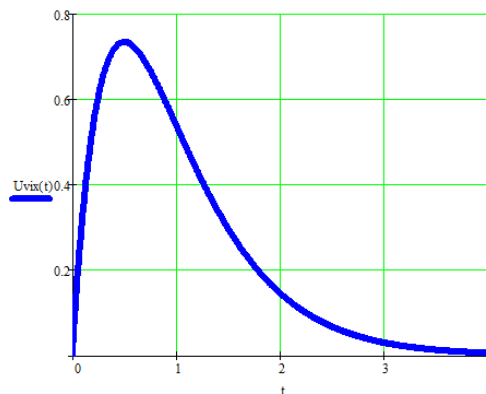


Рисунок 1.83

Відповідь:  $g(t) = 2e^{-2t}$ ;  $h(t) = 1 - e^{-2t}$ ;  $u_{\text{вих}}(t) = 4te^{-2t} \text{ В.}$

**Приклад 1.41.** У схемі, що зібрана на ідеальному операційному підсилювачу (рис. 1.84) знайти напругу на виході  $u_{30}(t)$ , побудувати її графік. Вхідна напруга  $u_{10}(t) = 1 - e^{-t}, t \geq 0$  В.. Числові значення елементів наведені на схемі: опори в кОм, ємності в нФ..

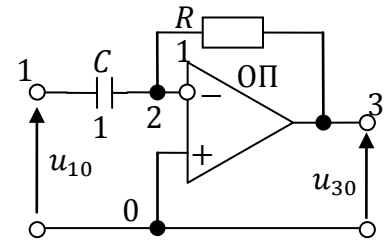


Рисунок 1.84

#### Розв'язання

Коефіцієнт передачі за напругою кола (рис. 1.84)

$$K_U(p) = -\frac{Z_2}{Z_1} = -\frac{R}{1/pC} = -RCp = -p.$$

#### Перший спосіб

Операторна вхідна напруга

$$U_{10}(p) = \frac{1}{p} - \frac{1}{p+1} = \frac{p+1-p}{p(p+1)} = \frac{1}{p(p+1)};$$

Оскільки

$$K_U(p) = \frac{U_{\text{вих}}(p)}{U_{\text{вх}}(p)} = \frac{U_{30}(p)}{U_{10}(p)}.$$

Звідси вихідна напруга

$$U_{\text{вих}}(p) = U_{\text{вх}}(p) \cdot K_U(p);$$

$$U_{30}(p) = U_{10}(p) \cdot K_U(p) = -p \cdot \frac{1}{p(p+1)} = -\frac{1}{p+1} \rightarrow -e^{-t};$$

У часовій формі це відповідає  $u_{30}(t) = -e^{-t}$  В.

#### Другий спосіб

Оскільки коефіцієнт передачі  $K_U(p) = -p$ , то у часовій формі це відповідає диференціюванню, тоді напруга визначається

$$u_{30}(t) = -\frac{d}{dt}[u_{10}(t)] = -\frac{d}{dt}[1 - e^{-t}] = -e^{-t} \text{ В.}$$

Зобразимо на рис. 1.85 вхідну  $u_{10}(t)$  та вихідну  $u_{30}(t)$  напруги.

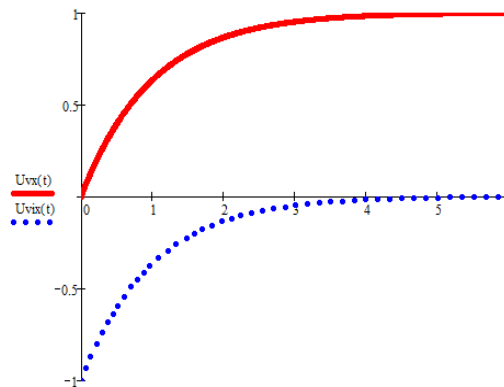


Рисунок 1.85

Відповідь:  $u_{30}(t) = -e^{-t}$  В.

**Приклад 1.42.** У схемі, що зібрана на ідеальному операційному підсилювачу (рис. 1.86) знайти напругу на виході  $u_{30}(t)$ . Вхідна напруга визначається  $u_{10}(t) = 1 - e^{-t}$ ,  $t \geq 0$  В. Числові значення елементів наведені на схемі: опори в кОм, ємності в нФ.

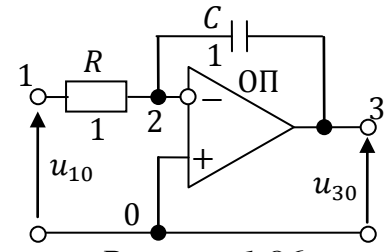


Рисунок 1.86

#### Розв'язання

Коефіцієнт передачі за напругою кола (рис. 1.86)

$$K_U(p) = -\frac{Z_2}{Z_1} = -\frac{1/pC}{R} = -\frac{1}{RCp} = -\frac{1}{p}.$$

#### Перший спосіб

Операторна вхідна напруга

$$U_{10}(p) = \frac{1}{p} - \frac{1}{p+1} = \frac{p+1-p}{p(p+1)} = \frac{1}{p(p+1)}.$$

Оскільки

$$K_U(p) = \frac{U_{\text{вих}}(p)}{U_{\text{вх}}(p)} = \frac{U_{30}(p)}{U_{10}(p)}.$$

Звідси вихідна напруга

$$U_{30}(p) = U_{10}(p) \cdot K_U(p) = -\frac{1}{p} \cdot \frac{1}{p(p+1)} = -\frac{1}{p^2(p+1)}.$$

За теоремою розкладання

$$U_{30}(p) = -\frac{1}{p^2(p+1)} = \frac{A_1}{p+1} + \frac{A_2}{p^2} + \frac{A_3}{p}.$$

Коефіцієнти при лишках функції у особливих точках

$$A_1 = -\frac{1}{p^2} \Big|_{p=-1} = -1; \quad A_2 = -\frac{1}{p+1} \Big|_{p=0} = -1;$$

$$A_3 = \frac{d}{dp} \left[ -\frac{1}{p+1} \right] \Big|_{p=-2} = \frac{1}{(p+1)^2} \Big|_{p=0} = 1.$$

У результаті одержимо

$$U_{30}(p) = \frac{-1}{p+1} - \frac{1}{p^2} + \frac{1}{p}.$$

У часовій формі це відповідає

$$u_{30}(t) = -e^{-t} - t + 1 \text{ В.}$$

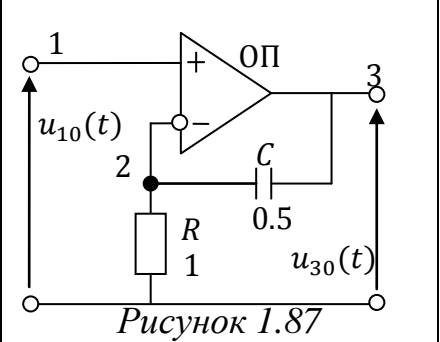
#### Другий спосіб

Оскільки коефіцієнт передачі  $K_U(p) = -1/p$ , то у часовій формі це відповідає інтегруванню, тоді напруга визначається

$$u_{30}(t) = -\int_0^t u_{10}(t) dt = -\int_0^t (1 - e^{-t}) dt = -(t + e^{-t}) \Big|_0^t = -t - e^{-t} + 1.$$

Відповідь:  $u_{30}(t) = 1 - e^{-t} - t$ , В.

**Приклад 1.43.** У колі, що зібране на ідеальному операційному підсилювачу (рис. 1.87), знайти напругу на виході  $u_3(t)$  та побудувати її. Вхідна напруга  $u_{10}(t) = e^{-t}$ ,  $t \geq 0$  В. Числові значення елементів на схемі такі: опори в кОм, ємності в нФ.



Розв'язання

Коефіцієнт передачі за напругою кола (рис. 1.87)

$$K_u(p) = 1 + \frac{1}{\frac{pC}{R}} = 1 + \frac{2}{p} = \frac{p+2}{p}.$$

Операторна вхідна напруга

$$U_{10}(p) = \frac{1}{p+1}.$$

Оскільки  $K_u(p) = U_{30}(p)/U_{10}(p)$ .

Звідси визначимо

$$U_{30}(p) = U_{10}(p) \cdot K_u(p) = \frac{1}{p+1} \cdot \frac{p+2}{p} = \frac{p+2}{p(p+1)}.$$

За теоремою розкладання

$$U_{30}(p) = \frac{p+2}{p(p+1)} = \frac{A_1}{p} + \frac{A_2}{p+1}.$$

Коефіцієнти при лишках функції у особливих точках

$$A_1 = \left. \frac{p+2}{p(p+1)} p \right|_{p=0} = \left. \frac{p+2}{p+1} \right|_{p=0} = 2;$$

$$A_2 = \left. \frac{p+2}{p(p+1)} (p+1) \right|_{p=-1} = \left. \frac{p+2}{p} \right|_{p=-1} = -1.$$

Отже,

$$U_{30}(p) = \frac{2}{p} - \frac{1}{p+1}.$$

У часовій формі (рис. 1.88).

$$u_{30}(t) = 2 - e^{-t}.$$

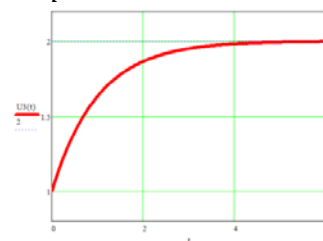


Рисунок 1.88

Оскільки коефіцієнт передачі  $K_U(p) = (1 + 2/p)$ , то у часовій формі це відповідає інтегруванню, тоді напруга визначається

$$u_{30}(t) = u_{10}(t) + 2 \int_0^t u_{10}(t) dt = e^{-t} + 2 \int_0^t e^{-t} dt = e^{-t} - 2e^{-t} + 2 = 2 - e^{-t}.$$

Відповідь:  $u_{\text{вих}}(t) = 2 - e^{-t}$ , В.

**Приклад 1.44.** У колі, що зібране на ідеальному операційному підсилювачу (рис. 1.89), знайти напругу на виході  $u_{30}(t)$ . Вхідна напруга змінюється  $u_{10}(t) = 2 - e^{-t}, t \geq 0$  В. Числові значення елементів на схемі такі: опори в кОм, ємності в нФ.

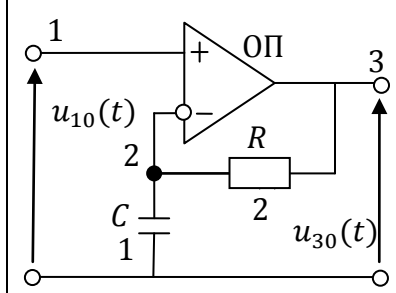


Рисунок 1.89

*Розв'язання*

Коефіцієнт передачі за напругою кола (рис. 1.89)

$$K_U(p) = 1 + \frac{Z_2}{Z_1} = 1 + \frac{R}{1/pC} = 1 + RCp = 1 + 2p.$$

1 спосіб

Операторна вхідна напруга

$$U_{BX}(p) = \frac{2}{p} - \frac{1}{p+1} = \frac{2p+2-p}{p(p+1)} = \frac{p+2}{p(p+1)}.$$

Оскільки

$$K_U(p) = \frac{U_{ВИХ}(p)}{U_{BX}(p)} \rightarrow U_{ВИХ}(p) = K_U(p)U_{BX}(p)$$

Звідси визначимо

$$U_{ВИХ}(p) = \frac{(p+2)(1+2p)}{p(p+1)}.$$

За теоремою розкладання

$$U_{BX}(p) = A_0 + \frac{A_1}{p} + \frac{A_2}{p+1}.$$

Коефіцієнти при лишках функції у особливих точках

$$A_0 = 2; \quad A_1 = \left. \frac{(p+2)(1+2p)}{p+1} \right|_{p=0} = 2; \quad A_2 = \left. \frac{(p+2)(1+2p)}{p} \right|_{p=-1} = 1;$$

У результаті одержимо

$$U_{ВИХ}(p) = 2 + \frac{2}{p} + \frac{1}{p+1}.$$

У часовій формі це відповідає

$$u_{ВИХ}(t) = 2\delta(t) + 2 + e^{-t}.$$

2 спосіб

Оскільки коефіцієнт передачі  $K_U(p) = (1+2p)$ , то у часовій формі це відповідає диференціюванню, тоді напруга визначається

$$\begin{aligned} u_{30}(t) &= u_{10}(t) + 2 \frac{d}{dt} u_{10}(t) = 2 - e^{-t} + 2 \frac{d}{dt} [2 - e^{-t}] + 2\delta(t) = \\ &= 2 - e^{-t} + 2e^{-t} + 2\delta(t) = 2 + e^{-t} + 2\delta(t). \end{aligned}$$

Відповідь:  $u_{ВИХ}(t) = 2\delta(t) + 2 + e^{-t}$ , В.

**Приклад 1.45.** У колі (рис. 1.90) до та після комутації визначити напругу, струм на ємності операторним методами. Побудувати їх графіки. Числові значення елементів наведені на схемі: напруга – В, опори – кОм, ємності – нФ.

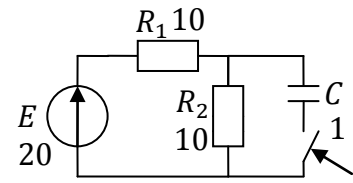


Рисунок 1.90

### Розв'язання

Перетворимо джерело напруги на джерело струму у операторному колі після комутації (рис. 1.91 а)

$$J(p) = \frac{E(p)}{R_1} = \frac{20}{p}.$$

Еквівалентний опір (рис. 1.91 б)

$$R_{12} = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} = \frac{10 \cdot 10}{10 + 10} = 5 \text{ кОм}.$$

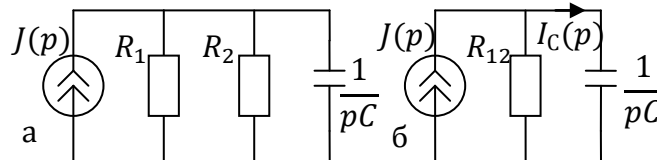


Рисунок 1.91

За формулою дільника струму

$$I_c(p) = \frac{J(p) \cdot R_{12}}{R_{12} + \frac{1}{pC}} = \frac{2}{p} \cdot \frac{5p}{1 + 5p} = \frac{2}{p + 0.2}.$$

За таблицею Лапласа

$$i_c(t) = 2e^{-0.2t}.$$

Струм до та після комутації (рис. 1.92 а)

$$i_c(t) = \begin{cases} 0, & t < 0; \\ 2e^{-0.2t}, & t \geq 0; \end{cases} \text{ мА}$$

Напруга на ємності (рис. 1.92 б)

$$u_c(t) = \frac{1}{C} \int_0^t i_c(t) dt = \begin{cases} 0, & t < 0; \\ 10 - 10e^{-0.2t}, & t \geq 0; \end{cases} \text{ В}.$$

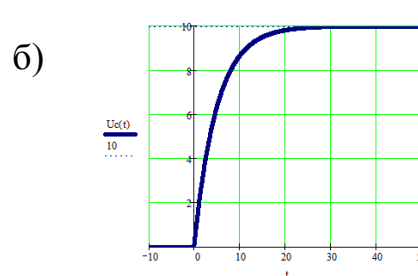
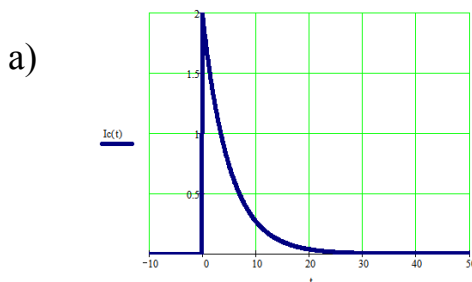


Рисунок 1.92



**Приклад 1.46.** У колі (рис. 1.93) до та після комутації визначити напругу, струм на ємності операторним методами. Побудувати їх графіки. Числові значення елементів наведені на схемі: напруга – В, опори – кОм, індуктивності – мГн.

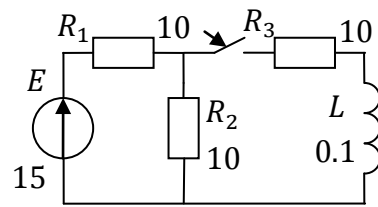


Рисунок 1.93

### Розв'язання

Перетворимо джерело напруги на джерело струму у операторному колі після комутації (рис. 1.94 а)

$$J(p) = \frac{E(p)}{R_1} = \frac{1.5}{p}.$$

Еквівалентний опір (рис. 1.94 б)

$$R_{12} = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} = \frac{10 \cdot 10}{10 + 10} = 5 \text{ кОм}.$$

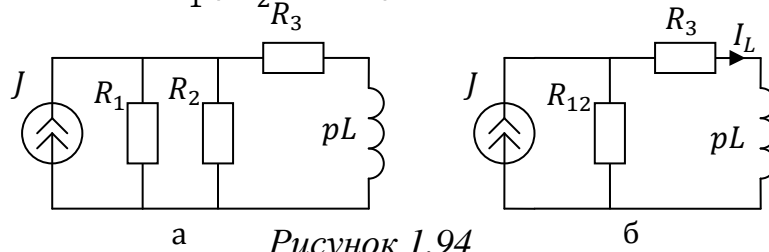


Рисунок 1.94

За формулою дільника струму

$$I_L(p) = \frac{J(p) \cdot R_{12}}{R_{12} + R_3 + pL} = \frac{1.5}{p} \cdot \frac{5}{5 + 10 + 0.1p} = \frac{75}{p(p + 150)}.$$

За теоремою розкладання

$$I_L(p) = \frac{75}{p(p + 150)} = \frac{A_1}{p} + \frac{A_2}{p + 150}.$$

Коефіцієнти при лишках функції у особливих точках

$$A_1 = \left. \frac{75}{p + 150} \right|_{p=0} = \frac{75}{150} = 0.5; \quad A_2 = \left. \frac{75}{p} \right|_{p=-150} = \frac{75}{-150} = -0.5.$$

Отже,

$$I_L(p) = \frac{0.5}{p} - \frac{0.5}{p + 150} \rightarrow i_L(t) = 0.5 - 0.5e^{-150t}.$$

Струм та напруга до та після комутації (рис. 1.95)

$$i_L(t) = \begin{cases} 0, & t < 0; \\ 0.5 - 0.5e^{-150t}, & t \geq 0; \end{cases} \text{ мА}; \quad u_L(t) = L \frac{di_L(t)}{dt} = \begin{cases} 0, & t < 0; \\ 7.5e^{-150t}, & t \geq 0; \end{cases} \text{ В}.$$

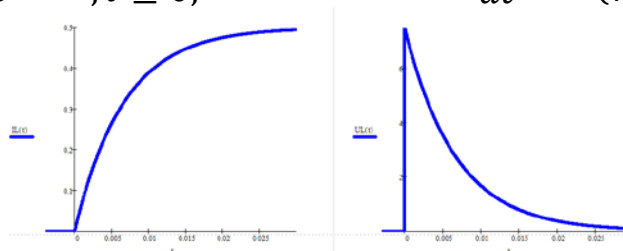


Рисунок 1.95

## 1.6. Довгі лінії

**Приклад 1.47.** У лінії із втратами, що працює в узгодженому гармонічному режимі на частоті 15 МГц на відстані 60 м від генератора напруга змінюється за законом  $u(t, 60) = 50 \cos(\omega t + 12^\circ)$  В. Записати вираз напруги на відстані 125 м від генератора  $u(t, 125)$ . Швидкість поширення хвилі дорівнює швидкості світла  $C$ . Коефіцієнт загасання  $\alpha = 0.00781$  Неп/м.

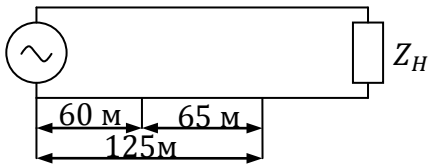


Рисунок 1.96

*Розв'язання*

Зобразимо лінію із опором навантаження (рис. 1.96).

Закон зміни напруги падаючої хвилі вздовж лінії

$$u(t, x) = U_0 e^{-\alpha x} \cos(\omega t + \theta - \beta x) \text{ В.}$$

Закон зміни амплітуди падаючої хвилі від координати (рис. 1.97)

$$u(x) = U_0 e^{-\alpha x}.$$

Отже, потрібно визначити амплітуду та фазу на відстані

$$l = 125 - 60 = 65 \text{ м.}$$

Напруга

$$u(l) = U_0 e^{-\alpha l} = 50 \cdot e^{-0.00781 \cdot 65} = 30 \text{ В.}$$

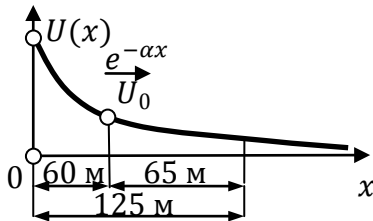


Рисунок 1.97

Довжина хвилі

$$\lambda = \frac{c}{f} = \frac{3 \cdot 10^8}{15 \cdot 10^6} = \frac{300}{15} = 20 \text{ м.}$$

Коефіцієнт фази

$$\beta = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{20} = \frac{\pi}{10}.$$

Набіг фази на відстані  $l = 65$  м

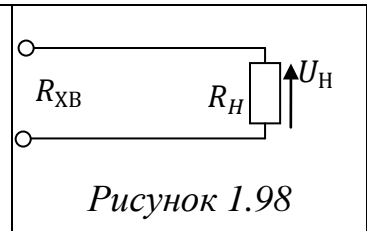
$$\beta x = \frac{\pi}{10} \cdot 65 = 6.5\pi = 6\pi + \frac{\pi}{2} = 3 \cdot 2\pi + \frac{\pi}{2}$$

Закон зміни напруги на відстані 125 м від генератора

$$\begin{aligned} u(t, 125) &= U_0 e^{-\alpha x} \cos(\omega t + \theta - \beta x) = 30 \cdot \cos(\omega t + 12^\circ - 3 \cdot 360^\circ - 90^\circ) = \\ &= 48.3 \cdot \cos(\omega t - 3 \cdot 360^\circ - 68^\circ). \end{aligned}$$

Відповідь:  $u(t, 125) = 30 \cos(\omega t - 68^\circ)$  В.

**Приклад 1.48.** У лінії без втрат (рис. 1.98) визначити: коефіцієнт відбиття за напругою та струмом, КБХ, КСХ. Побудувати розподіл  $u(x)$  та  $i(x)$  від 0 до  $1.5\lambda$ . Лінія має опори:  $R_{XB} = 50$  Ом,  $R_H = 100$  Ом. Амплітуда напруги у навантаженні  $U_H = 200$  В.



*Розв'язання*

Коефіцієнти відбиття за напругою та за струмом

$$n_u = \frac{U_{BID}}{U_{PAD}} = \frac{Z_H - Z_{XB}}{Z_H + Z_{XB}} = \frac{R_H - R_{XB}}{R_H + R_{XB}} = \frac{100 - 50}{100 + 50} = \frac{50}{150} = \frac{1}{3};$$

$$n_i = -n_u = -1/3.$$

Коефіцієнт біжної та стійної хвилі

$$KBX = \frac{U_{min}}{U_{max}} = \frac{|U_{PAD}| - |U_{BID}|}{|U_{PAD}| + |U_{BID}|} = \frac{1 - |n|}{1 + |n|} = \frac{1 - \frac{1}{3}}{1 + \frac{1}{3}} = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{4}{3}} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2};$$

$$КСХ = \frac{1}{KBX} = \frac{1}{0.5} = 2.$$

Оскільки  $n_u = 1/3 > 0$ , то першим від кінця лінії буде максимум напруги, з якого і почнеться розподіл напруги. Таким чином,  $U_{max} = U_H = 200$  В.

Із виразу для КБХ визначимо

$$U_{min} = KBX \cdot U_{max} = 0,5 \cdot 200 = 100 \text{ В.}$$

Отже побудуємо розподіл напруги вздовж лінії (рис. 1.99).

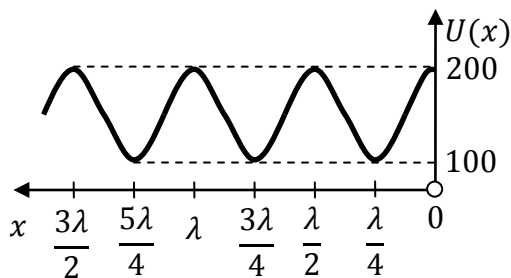


Рисунок 1.99

Із закону Ома визначимо амплітуду струму у навантаженні

$$I_H = \frac{U_H}{R_H} = \frac{200}{100} = 2 \text{ А.}$$

Оскільки  $n_i = -n_u = -1/3$ , то першим від кінця лінії буде мінімум струму, з якого і почнеться розподіл. Отже,  $I_{min} = I_H = 2$  А.

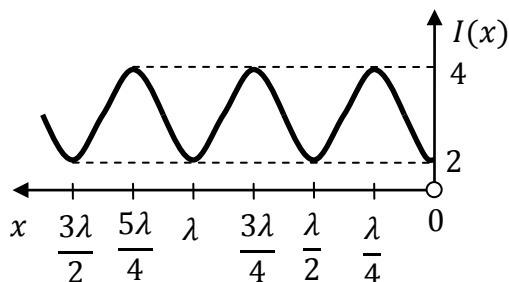


Рисунок 1.100

КБХ струмів

$$KBX = \frac{I_{min}}{I_{max}}.$$

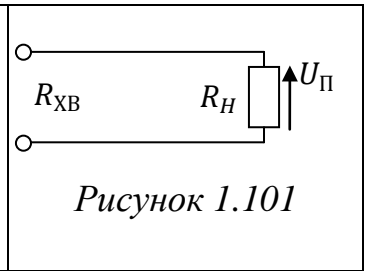
Звідси визначимо

$$I_{max} = \frac{I_{min}}{KBX} = \frac{2}{0,5} = 4 \text{ А.}$$

Отже, побудуємо розподіл амплітуди струму вздовж лінії (рис. 1.100).

Відповідь:  $n_u = 1/3$ ,  $n_i = -1/3$ , КБХ = 0.5, КСХ = 2.

**Приклад 1.49.** У лінії без втрат (рис. 1.101) визначити: коефіцієнти відбиття за напругою та струмом, КБХ, КСХ. Побудувати розподіл  $u(x)$  та  $i(x)$  від 0 до  $1.5\lambda$  від кінця лінії. Лінія має опори:  $R_{XB} = 50$  Ом,  $R_H = 100$  Ом. Амплітуда падаючої напруги у навантаженні  $U_{ПД} = 300$  В.



### Розв'язання

Коефіцієнти відбиття за напругою та струмом

$$n_u = \frac{U_{ВІД}}{U_{ПД}} = \frac{Z_H - Z_{XB}}{Z_H + Z_{XB}} = \frac{R_H - R_{XB}}{R_H + R_{XB}} = \frac{100 - 50}{100 + 50} = \frac{50}{150} = \frac{1}{3};$$

$$n_i = -n_u = -1/3.$$

Коефіцієнт біжної та стійної хвилі

$$KBX = \frac{U_{min}}{U_{max}} = \frac{|U_{ПД}| - |U_{ВІД}|}{|U_{ПД}| + |U_{ВІД}|} = \frac{1 - |n|}{1 + |n|} = \frac{1 - \frac{1}{3}}{1 + \frac{1}{3}} = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{4}{3}} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2};$$

$$КСХ = \frac{1}{KBX} = \frac{1}{0.5} = 2.$$

Оскільки  $n_u = 1/3 > 0$ , то першим від кінця лінії буде максимум напруги.

Із виразу для коефіцієнта відбиття визначимо амплітуду відбитої хвилі

$$U_{ВІД} = n_u \cdot U_{ПД} = \frac{1}{3} \cdot 300 = 100 \text{ В.}$$

Мінімальне та максимальне значення напруги:

$$U_{min} = |U_{ПД}| - |U_{ВІД}| = 300 - 100 = 200 \text{ В;}$$

$$U_{max} = |U_{ПД}| + |U_{ВІД}| = 300 + 100 = 400 \text{ В.}$$

Отже, побудуємо розподіл напруги вздовж лінії (рис. 1.102).

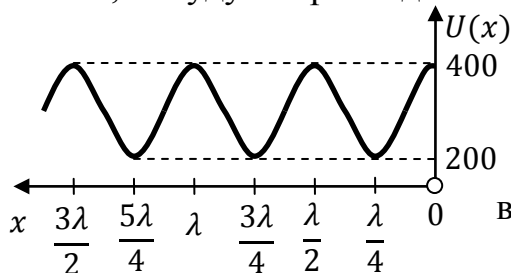


Рисунок 1.102

Із закону Ома

$$I_{ПД} = \frac{U_{ПД}}{R_{XB}} = \frac{300}{50} = 6 \text{ А.}$$

Оскільки  $n_i = -n_u = -1/3$ , то першим від кінця лінії буде мінімум струму.

Коефіцієнта відбиття за струмом

$$n_i = I_{ВІД}/I_{ПД}.$$

Отже, побудуємо розподіл амплітуд струму вздовж лінії (рис. 1.103)

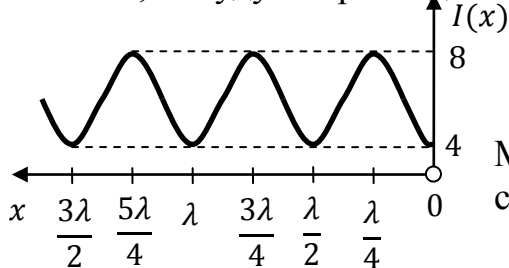


Рисунок 1.103

Звідси визначимо

$$I_{ВІД} = n_i \cdot I_{ПД} = \frac{1}{3} \cdot 6 = 2 \text{ А.}$$

Мінімальне та максимальне значення струму:

$$I_{min} = |I_{ПД}| - |I_{ВІД}| = 6 - 2 = 4 \text{ А;}$$

$$I_{max} = |I_{ПД}| + |I_{ВІД}| = 6 + 2 = 8 \text{ А.}$$

Відповідь:  $n_u = 1/3$ ,  $n_i = -1/3$ , КБХ = 0.5, КСХ = 2.

**Приклад 1.50.** Лінія без втрат працює в усталеному гармонічному режимі. Коефіцієнт біжної хвилі КБХ = 1/3. Яким повинене бути коефіцієнт відбиття за напругою, щоб відстань до першого максимуму від кінця лінії була  $\lambda/8$ . Яке при цьому буде відношення опору навантаження до хвильового опору?

*Розв'язання*

Коефіцієнт біжної хвилі

$$KBX = \frac{U_{min}}{U_{max}} = \frac{1 - |n|}{1 + |n|}.$$

Звідси визначимо модуль коефіцієнта відбиття

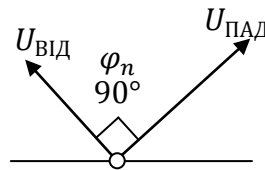
$$|n| = \frac{1 - KBX}{1 + KBX} = \frac{1 - 1/3}{1 + 1/3} = 0.5.$$

Кутова відстань (рис. 1.104) до першого по порядку максимуму

$$\beta x_{max} = \frac{\varphi_n}{2}.$$

Звідси визначимо аргумент

$$\varphi_n = 2\beta x_{max} = 2 \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \frac{\lambda}{8} = \frac{\pi}{2}.$$



*Рисунок 1.104*

Комплексний коефіцієнт відбиття за напругою

$$n = |n|e^{j\varphi_n} = 0.5e^{j90^\circ} = 0.5j.$$

Коефіцієнт відбиття за напругою

$$\dot{n}_u = \frac{U_{ВІД}}{U_{ПАД}} = \frac{Z_H - R_{XB}}{Z_H + R_{XB}} = \frac{\frac{Z_H}{R_{XB}} - 1}{\frac{Z_H}{R_{XB}} + 1}.$$

Звідси визначимо

$$\frac{Z_H}{R_{XB}} = \frac{1 - \dot{n}_u}{1 + \dot{n}_u} = \frac{1 - 0.5j}{1 + 0.5j} = 0.6 - 0.8j = 1e^{-53.17^\circ}.$$

Відповідь:  $\dot{n}_u = 0.5j$ ;  $Z_H/Z_{XB} = e^{-j53.13^\circ}$ .

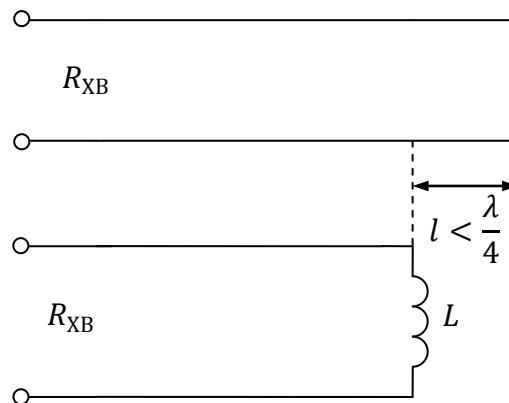
**Приклад 1.51.** Яку необхідно взяти довжину  $l$  короткозамкненої ділянки, щоб вона була еквівалентна індуктивності  $L = 0.5$  мкГн на частоті  $f = 20$  МГц. Хвильовий опір лінії  $R_{XB} = 80$  Ом.

*Розв'язання*

Довжина хвилі

$$\lambda = \frac{c}{f} = \frac{3 \cdot 10^8}{20 \cdot 10^6} = 15 \text{ м.}$$

Індуктивність в кінці лінії еквівалентна короткозамкненій ділянці довжиною  $l < \lambda/4$  (рис. 1.105).



*Рисунок 1.105*

Опір індуктивності

$$Z_L = j\omega L = j2\pi \cdot f \cdot L = j \cdot 2\pi \cdot 20 \cdot 10^6 \cdot 0.5 \cdot 10^{-6} \cong 62.8j.$$

Вхідний опір короткозамкненої ділянки

$$Z_{BX.K3} = jR_{XB} \cdot \operatorname{tg}(\beta x).$$

Прирівняємо ці опори

$$Z_{BX.K3} = Z_L, \\ jR_{XB} \cdot \operatorname{tg}(\beta x) = 62.8j.$$

Величина КЗ ділянки

$$l = x = \frac{1}{\beta} \operatorname{arctg}\left(\frac{62.8}{R_{XB}}\right) = \frac{\lambda}{2\pi} \operatorname{arctg}\left(\frac{62.8}{80}\right) = \frac{15}{2\pi} \cdot 0.666 \cong 1.58 \text{ м.}$$

Відповідь:  $l = 1.58$  м.

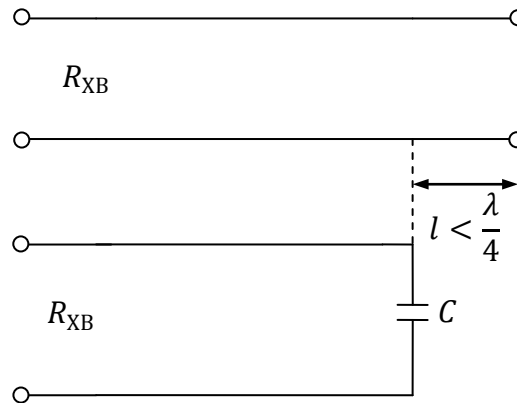
**Приклад 1.52.** Яку необхідно взяти довжину  $l$  розімкненої ділянки, щоб вона була еквівалентна ємності  $C = 51$  пФ на частоті  $f = 30$  МГц. Хвильовий опір лінії  $R_{XB} = 75$  Ом.

*Розв'язання*

Довжина хвилі

$$\lambda = \frac{c}{f} = \frac{3 \cdot 10^8}{30 \cdot 10^6} = 10 \text{ м.}$$

Ємність в кінці лінії еквівалентна розімкненій ділянці довжиною  $l < \lambda/4$  (рис. 1.106).



*Рисунок 1.106*

Опір ємності

$$Z_C = -\frac{j}{2\pi \cdot f \cdot C} = -\frac{j}{2\pi \cdot 30 \cdot 10^6 \cdot 51 \cdot 10^{-12}} \cong -104j.$$

Вхідний опір ділянки у режимі холостого ходу

$$Z_{BX.XX} = -jR_{XB} \cdot \text{ctg}(\beta x).$$

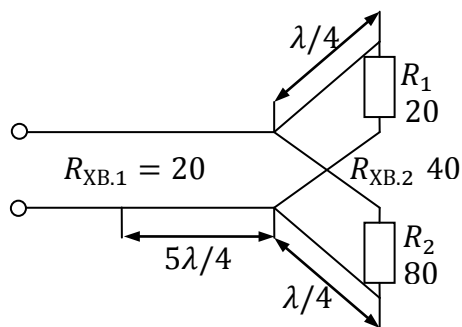
Прирівняємо ці опори

$$\begin{aligned} Z_{BX.XX} &= Z_C, \\ -jR_{XB} \cdot \text{ctg}(\beta x) &= -104j. \end{aligned}$$

Величина ділянки у режимі холостого ходу

$$l = x = \frac{1}{\beta} \text{arcctg}\left(\frac{104}{R_{XB}}\right) = \frac{\lambda}{2\pi} \text{arctg}\left(\frac{104}{75}\right) = \frac{10}{2\pi} \cdot 0.625 \cong 1 \text{ м.}$$

Відповідь:  $l = 1$  м.

<p><b>Приклад 1.53.</b> Яким повинний бути вхідний опір відрізка <math>Z_{BX}(\frac{5\lambda}{4})</math> лінії без втрат (рис. 1.107)? До цього відрізка із хвильовим опором <math>R_{XB.1}</math> за допомогою шлейфів довжиною <math>\lambda/4</math> підключені опори <math>R_1</math> та <math>R_2</math>. Хвильовий опори цих шлейфів однакові <math>R_{XB.2}</math>. Числові значення опорів на схемі подані в Ом.</p>	 <p>Рисунок 1.107</p>
--	---

*Розв'язання*

Вхідний опір чвертьхвильового відрізка

$$Z_{BX}\left(\frac{\lambda}{4}\right) = \frac{Z_{XB}^2}{R_H}.$$

Вхідні опори чвертьхвильових відрізків:

$$R_{BX.1} = Z_{BX.1}\left(\frac{\lambda}{4}\right) = \frac{R_{XB.2}^2}{R_1} = \frac{40^2}{20} = 80 \text{ Ом};$$

$$R_{BX.2} = Z_{BX.2}\left(\frac{\lambda}{4}\right) = \frac{R_{XB.2}^2}{R_2} = \frac{40^2}{80} = 20 \text{ Ом}.$$

Оскільки опори  $R_{BX.1}$  та  $R_{BX.2}$  з'єднані паралельно, то замінимо їх еквівалентним опором навантаження (рис. 1.108)

$$R_H = \frac{R_{BX.1} \cdot R_{BX.2}}{R_{BX.1} + R_{BX.2}} = \frac{80 \cdot 20}{80 + 20} = 16 \text{ Ом}.$$

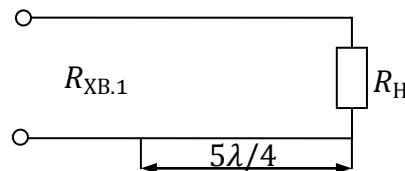


Рисунок 1.108

Щоб у лінії був режим біжних хвиль (узгоджений) необхідно виконання умови  $R_{XB} = R_H = 16 \text{ Ом}$ .

Вхідний опір чвертьхвильового відрізка

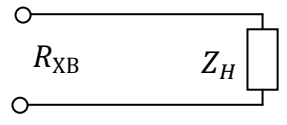
$$Z_{BX}\left(\frac{\lambda}{4}\right) = \frac{R_{XB1}^2}{R_H} = \frac{20^2}{16} = 25 \text{ Ом}.$$

Вхідний опір шуканого відрізка

$$Z_{BX}\left(\frac{5\lambda}{4}\right) = Z_{BX}\left(\frac{\lambda}{4} + \lambda\right) = Z_{BX}\left(\frac{\lambda}{4}\right) = 25 \text{ Ом}.$$

Відповідь:  $Z_{BX}(\frac{5\lambda}{4}) = 25 \text{ Ом}$ .



<p><b>Приклад 1.54.</b> У лінії без втрат (рис. 1.109) визначити КБХ, відстань до першого по порядку максимуму та мінімуму напруги. Знайти напругу в кінці лінії <math>u_H(t)</math>. Хвильовий опір лінії є <math>R_{XB} = 50</math> Ом, а опір навантаження є <math>Z_H = 50 + j100</math> Ом, довжина хвилі <math>\lambda = 32</math> м. Падаюча напруга в кінці лінії <math>u_{II}(t) = 200 \cos(\omega t + 45^\circ)</math>.</p>	 <p style="text-align: center;">Рисунок 1.109</p>
---	--

*Розв'язання*

Коефіцієнт відбиття за напругою

$$\dot{n}_u = \frac{U_{\text{ВІД}}}{U_{\text{ПАД}}} = \frac{Z_H - R_{XB}}{Z_H + R_{XB}} = \frac{50 + j100 - 50}{50 + j100 + 50} = \frac{100j}{100 + 100j} = \frac{j}{1 + j} = \frac{1 \cdot e^{j90^\circ}}{\sqrt{2}e^{j45^\circ}} = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{j45^\circ}.$$

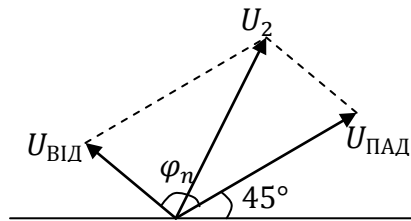


Рисунок 1.110

Із зображення векторів падаючої та відбитої хвилі (рис. 1.110) видно, що вектори відбитої та падаючої хвилі напруги при русі назустріч один одному із однаковими кутовими швидкостями  $\beta x$  зустрінуться через кут

$$\frac{\varphi_n}{2} = \frac{\pi}{8}.$$

Умова визначення відстані до першого по порядку максимуму

$$\beta x_{\max} = \frac{2\pi}{\lambda} x_{\max} = \frac{\pi}{8}.$$

Звідси визначимо відстань до першого по порядку максимуму

$$x_{\max} = \frac{\pi/8}{2\pi/\lambda} = \frac{\lambda}{16} = \frac{32}{16} = 2 \text{ м.}$$

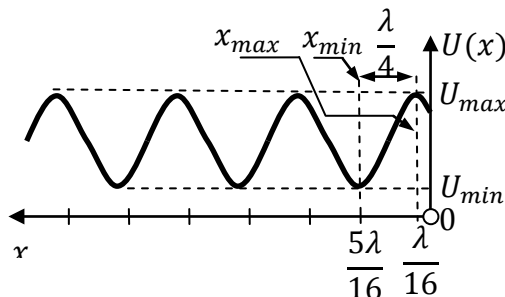


Рисунок 1.111

Отже, максимум напруги від кінця лінії буде на відстані 2 м (рис. 1.111). Оскільки мінімум та максимум напруги чергуються через  $\lambda/4$ , то відстань до першого по порядку мінімуму від кінця лінії становить

$$x_{min} = x_{max} + \frac{\lambda}{4} = 2 + \frac{32}{4} = 10 \text{ м.}$$

Коефіцієнт біжних хвиль

$$\text{КБХ} = \frac{U_{min}}{U_{max}} = \frac{|U_{\text{ПАД}}| - |U_{\text{ВІД}}|}{|U_{\text{ПАД}}| + |U_{\text{ВІД}}|} = \frac{1 - |n|}{1 + |n|} = \frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2} + 1} = 0.172.$$

Коефіцієнт стійної хвилі

$$\text{КСХ} = \frac{U_{max}}{U_{min}} = \frac{1}{\text{КБХ}} = \frac{1}{0.172} = 5.8.$$

Комплексна амплітуда падаючої напруги

$$\dot{U}_{\text{ПАД}} = 200e^{j45^\circ}.$$

Із виразу коефіцієнта відбиття амплітуда відбитої напруги

$$\dot{U}_{\text{ВІД}} = \dot{U}_{\text{ПАД}} \cdot \dot{n}_u = 200 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} e^{j45^\circ} = 100\sqrt{2}e^{j45^\circ}.$$

За методом комплексних амплітуд

$$\begin{aligned} \dot{U}_2 &= \dot{U}_{\text{ПАД}} + \dot{U}_{\text{ВІД}} = \dot{U}_{\text{ПАД}} + \dot{U}_{\text{ПАД}} \cdot \dot{n}_u = \dot{U}_{\text{ПАД}} \cdot (1 + \dot{n}_u) = \\ &= \dot{U}_{\text{ПАД}} \cdot \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}} e^{j45^\circ}\right) = \dot{U}_{\text{ПАД}} \cdot \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + j\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right) = \dot{U}_{\text{ПАД}} \cdot \left(\frac{3}{2} + j\frac{1}{2}\right) = \\ &= 0.5\dot{U}_{\text{ПАД}} \cdot (3 + j) = 0.5\sqrt{10}e^{j18.5^\circ} \cdot 200e^{j45^\circ} = 100\sqrt{10}e^{j63.5^\circ} \end{aligned}$$

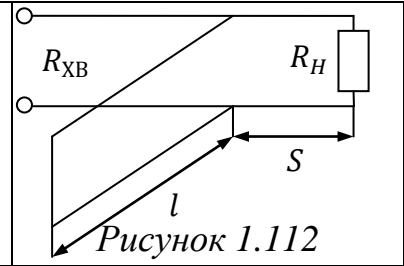
Тоді у часовій формі

$$u_2(t) = 100\sqrt{10} \cos(\omega t + 63.5^\circ) \text{ В.}$$

Відповідь: КБХ = 0.171,  $x_{max} = 2$  м;  $x_{min} = 10$  м,

$$u_2(t) = 100\sqrt{10} \cos(\omega t + 63.5^\circ) \text{ В.}$$

**Приклад 1.55.** У лінії без втрат (рис. 1.112) визначити місце ввімкнення короткозамкненого шлейфу  $S$  довжиною  $l = 0.4$  м, щоб лінія була узгоджена на частоті  $f = 50$  МГц. Лінія має хвильовий опір  $R_{ХВ} = 25$  Ом та опір навантаження  $R_H = 100$  Ом.



Розв'язання

Довжина хвилі

$$\lambda = \frac{C}{f} = \frac{3 \cdot 10^8}{50 \cdot 10^6} = 6 \text{ м.}$$

Вхідна провідність

$$Y_{XB} = Y_{XB} \frac{\cos(\beta x) + j m_1 \sin(\beta x)}{m_1 \cos(\beta x) + j \sin(\beta x)}, \quad m_1 = \frac{1}{m} = \frac{R_H}{R_{XB}} = \frac{100}{25} = 4.$$

Виділимо дійсну та уявну частини вхідної провідності

$$\begin{aligned} Y_{BX} &= Y_{XB} \frac{\cos(\beta x) + j m_1 \sin(\beta x)}{m_1 \cos(\beta x) + j \sin(\beta x)} = \\ &= Y_{XB} \frac{\cos(\beta x) + j m_1 \sin(\beta x)}{m_1 \cos(\beta x) + j \sin(\beta x)} \cdot \frac{m_1 \cos(\beta x) - j \sin(\beta x)}{m_1 \cos(\beta x) - j \sin(\beta x)} = \\ &= Y_{XB} \frac{m_1}{m_1^2 \cos^2(\beta x) + \sin^2(\beta x)} + 0.5j Y_{XB} \frac{[m_1^2 - 1] \sin(2\beta x)}{m_1^2 \cos^2(\beta x) + \sin^2(\beta x)}. \end{aligned}$$

Вхідна провідність короткозамкненої ділянки

$$Y_{BX.K3} = -j Y_{XB} \operatorname{ctg}(\beta x) = \frac{-j}{R_{XB}} \cdot \operatorname{ctg}\left(\frac{2\pi}{\lambda} \cdot l\right) = \frac{-j}{25} \cdot \operatorname{ctg}\left(\frac{2\pi}{6} \cdot 0.4\right) = \frac{-j}{11.13}.$$

Отже, необхідно компенсувати провідність  $Y = -0.09j$  Сім.

Визначимо місце ввімкнення шлейфу

$$\begin{aligned} \operatorname{Im}[Y_{BX}] &= Y_{BX.K3}; \\ \operatorname{Im}[Y_{BX}] &= Y_{XB} \frac{0.5[m_1^2 - 1] \sin(2\beta x)}{m_1^2 \cos^2(\beta x) + \sin^2(\beta x)} = Y_{XB} \frac{0.5[4^2 - 1] \sin(2\beta x)}{4^2 \cos^2(\beta x) + \sin^2(\beta x)} = \frac{1}{11.13}. \end{aligned}$$

Спростимо рівняння

$$11.13 \cdot 15 \cdot (\sin(\beta x) \cdot \cos(\beta x)) = 16 \cos^2(\beta x) + \sin^2(\beta x)$$

Розділимо обидві частини на  $\cos^2(\beta x)$

$$\begin{aligned} 167 \operatorname{tg}(\beta x) &= 16 + \operatorname{tg}^2(\beta x); \\ \operatorname{tg}^2(\beta x) - 167 \operatorname{tg}(\beta x) + 16 &= 0. \end{aligned}$$

Розв'яжемо рівняння

$$\operatorname{tg}(\beta x) = \frac{167 \pm \sqrt{27830}}{2}; \quad \operatorname{tg}(\beta x) = 166.912; \quad \operatorname{tg}(\beta x) = 0.088.$$

Звідси визначимо місце ввімкнення шлейфу

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{\lambda}{2\pi} \cdot \operatorname{arctg}(166.912^\circ) = \frac{6}{2\pi} \cdot 1.565 = 1.5 \text{ м}; \\ x_2 &= \frac{\lambda}{2\pi} \cdot \operatorname{arctg}(0.088^\circ) = \frac{6}{2\pi} \cdot 0.088 = 0.084 \text{ м.} \end{aligned}$$

Відповідь:  $S_1 = 1.5$  м,  $S_2 = 0.084$  м.

## 2. ДОПОМІЖНІ ФОРМУЛИ

### 2.1. Постійний струм

Для розрахунків електричних кіл використовують допоміжні одиниці, які наведені у таблиці 2.1.

Таблиця 2.1 – Допоміжні величини

Назва	Величина	Назва	Величина
кіло	$10^3$	піко	$10^{-12}$
мега	$10^6$	нано	$10^{-9}$
гіга	$10^9$	мікро	$10^{-6}$
тера	$10^{12}$	мілі	$10^{-3}$

У теорії кіл додатний напрям **струму (current)** позначають стрілкою (рис. 2.1 а).

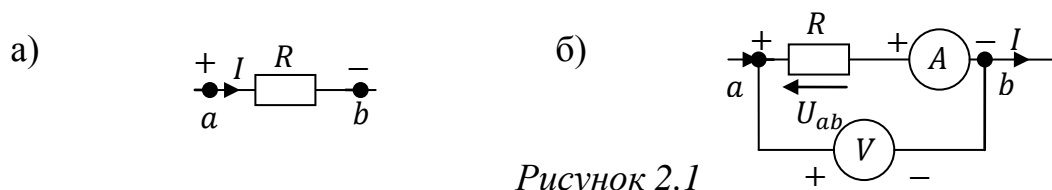


Рисунок 2.1

Електрична напруга (voltage) (рис. 6.1 б)

$$u_{ab} = \varphi_a - \varphi_b.$$

**Потужність** (power) елементів кола визначається як

$$p(t) = i(t) \cdot u(t) = i \cdot u,$$

причому додатному напрямку струму повинен відповідати додатний напрям напруги.

В еквівалентних схемах джерела електричної енергії умовно поділяють на незалежні: джерела напруги (рис. 2.2 а) та джерела струму (рис. 2.2 б) і незалежні або керовані.

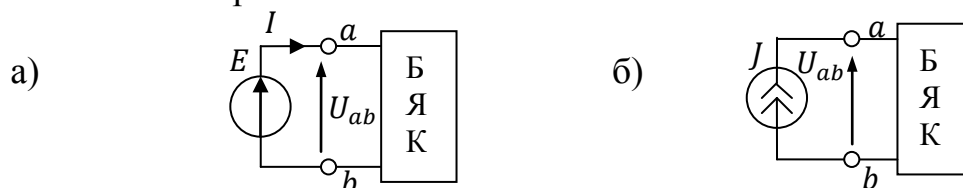


Рисунок 2.2

Внутрішній опір джерела напруги дорівнює нулю:  $r_i = 0$ , а внутрішній опір джерела струму становить  $r_j = \infty$ .

Потужність джерел:  $p_e = e \cdot i$ ;  $p_j = j \cdot u_{ab}$ .

Існує чотири типи керованих джерел (controlled sources):

- джерело напруги, кероване напругою (ДНКН):  $E = \mu \cdot u_{ab}$ , де  $\mu$  – це коефіцієнт пропорційності;

- джерело напруги кероване струмом (ДНКС):  $E = \gamma \cdot i$  де,  $\gamma$  – це коефіцієнт пропорційності;
- джерело струму, кероване напругою (ДСКН):  $J = S \cdot u_{ab}$  де,  $S$  – це коефіцієнт пропорційності (крутість);
- джерело струму, кероване струмом (ДСКС):  $J = \alpha \cdot i$ , де  $\alpha$  – це коефіцієнт пропорційності.

Для опора справедливий закон Ома (Ohm's law)

$$i = \frac{u}{R}.$$

Величина обернена опору називають **провідністю** (позначають  $G$  або  $g$ )

$$G = g = \frac{1}{R} = \frac{1}{r}.$$

Провідність вимірюється у Сіменсах (Сім).

Потужність на опорі

$$p = i \cdot u = i^2 R = \frac{u^2}{R}.$$

### Основні закони електричних кіл (basic laws of electrical circuits)

*Перший закон Кірхгофа (the first Kirchhoff's law)*

Алгебраїчна сума струмів у вузлі дорівнює нулю.

Для рис. 2.3 а  $i_1 + i_3 = i_2 + i_4$ .

Для рис. 2.3 б  $i_1 + i_2 + i_6 = i_3 + i_4 + i_5 + i_7 + i_8$ .

*Другий закон Кірхгофа (the second Kirchhoff's law)*

Алгебраїчна сума напруг по контуру обходу будь-якої ділянки кола дорівнює нулю (рис. 2.3 в):

$$u_{21} + u_{32} + u_{43} - u_{41} = 0.$$

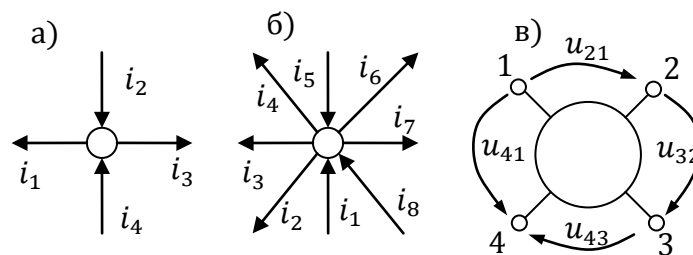


Рисунок 2.3

### Закон балансу потужностей

Випливає із закону збереження енергії, що для будь-якого електричного кола: середня потужність, що генерується джерелом дорівнює середній потужності, що споживається всіма приймачами

$$\sum E \cdot I_E + \sum U_J \cdot J = \sum I^2 R.$$

Для дільника струму (рис. 2.4)

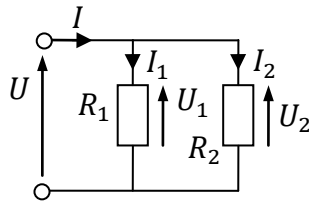


Рисунок 2.4

$$I_1 = I \cdot \frac{R_2}{R_1 + R_2}; \quad I_2 = I \cdot \frac{R_1}{R_1 + R_2}.$$

Коефіцієнт передачі за струмом – це відношення струму на виході до струму на вході

$$K_{I1} = \frac{I_{\text{ВИХ}}}{I_{\text{ВХ}}} = \frac{I_1}{I} = \frac{R_2}{R_1 + R_2};$$

$$K_{I2} = \frac{I_{\text{ВИХ}}}{I_{\text{ВХ}}} = \frac{I_2}{I} = \frac{R_1}{R_1 + R_2}.$$

Для дільника напруги (рис. 2.5)

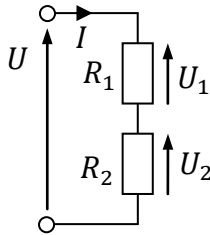


Рисунок 2.5

$$U_1 = \frac{UR_1}{R_1 + R_2}; \quad U_2 = \frac{UR_2}{R_1 + R_2}.$$

Коефіцієнт передачі за напругою – це відношення напруги на виході до напруги на вході

$$K_{U1} = \frac{U_{\text{ВИХ}}}{U_{\text{ВХ}}} = \frac{U_1}{U} = \frac{R_1}{R_1 + R_2};$$

$$K_{U2} = \frac{U_{\text{ВИХ}}}{U_{\text{ВХ}}} = \frac{U_2}{U} = \frac{R_2}{R_1 + R_2}.$$

### Еквівалентні перетворення (equivalent transformations)

Для послідовного з'єднання активних та пасивних елементів (рис. 2.6) схему можна спростити (рис. 2.7).

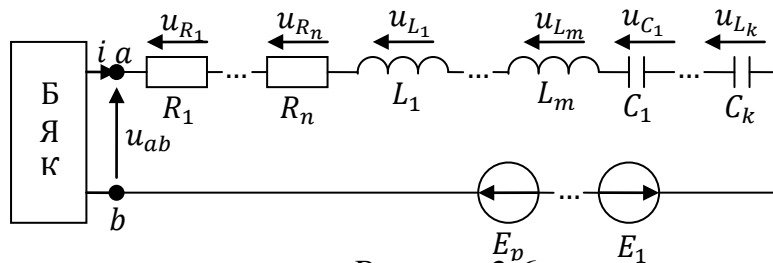


Рисунок 2.6

Еквівалентні параметри:

$$R_E = R_1 + \dots + R_n,$$

$$L_E = L_1 + \dots + L_m,$$

$$\frac{1}{C_E} = \frac{1}{C_1} + \dots + \frac{1}{C_k};$$

$$E_E = E_1 - \dots - E_p.$$

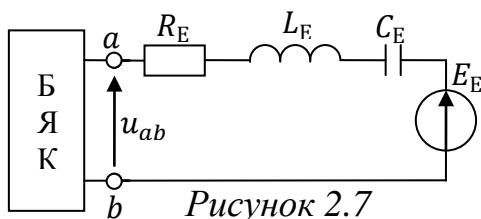


Рисунок 2.7

Для паралельного з'єднання активних та пасивних елементів (рис. 2.8) схему можна спростити (рис. 2.9).

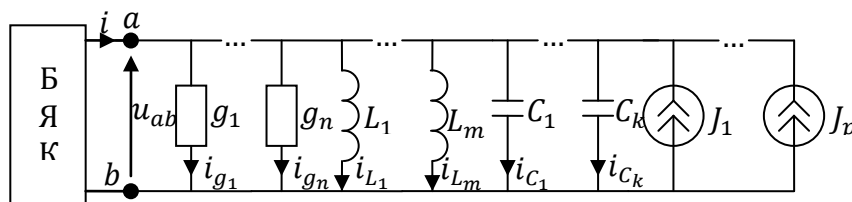


Рисунок 2.8

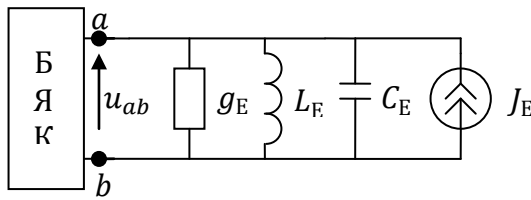


Рисунок 2.9

Еквівалентні параметри:

$$\begin{aligned} g_E &= g_1 + \dots + g_n, \\ C_E &= C_1 + \dots + C_m, \\ \frac{1}{L_E} &= \frac{1}{L_1} + \dots + \frac{1}{L_k}, \\ J_E &= J_1 + \dots + J_p. \end{aligned}$$

З'єднання опорів у формі зірка та трикутник (рис. 2.10).

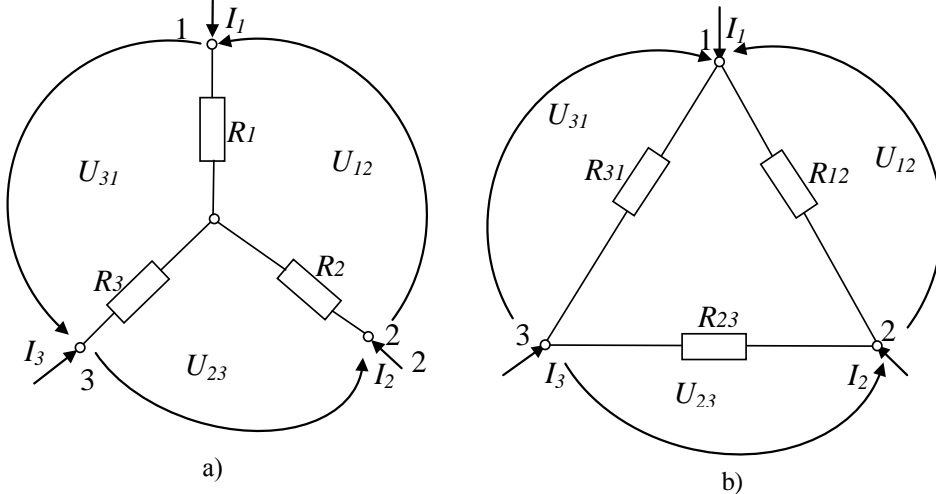


Рисунок 2.10

Опори з'єднані зіркою визначаються через опори трикутника:

$$R_1 = \frac{R_{31} \cdot R_{12}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}, \quad R_2 = \frac{R_{12} \cdot R_{23}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}, \quad R_3 = \frac{R_{23} \cdot R_{31}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}.$$

Опори з'єднані трикутником через опори, з'єднані зіркою:

$$\begin{aligned} R_{12} &= R_1 + R_2 + \frac{R_1 \cdot R_2}{R_3}, \quad R_{23} = R_2 + R_3 + \frac{R_2 \cdot R_3}{R_1}, \\ R_{31} &= R_3 + R_1 + \frac{R_1 \cdot R_3}{R_2}. \end{aligned}$$

Перетворення джерела струму у джерело напруги (рис. 2.11). Параметри елементів схеми заміщення

$$E = J \cdot R_i; \quad J = E/R_i.$$

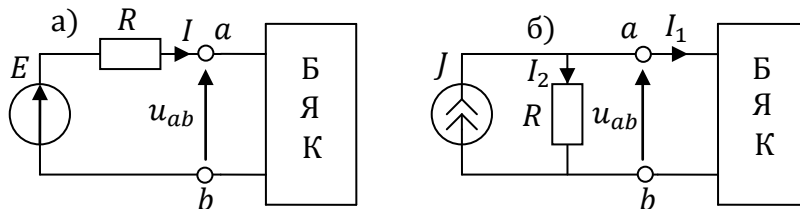


Рисунок 2.11

Винесення джерела напруги за вузол (рис. 2.12).

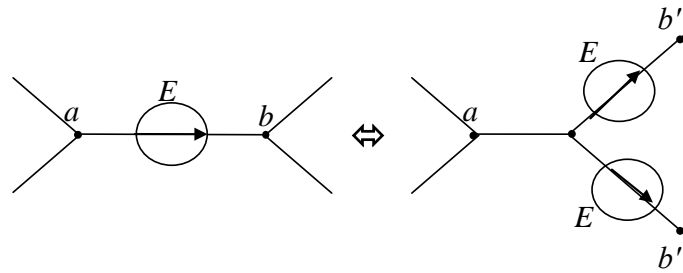


Рисунок 2.12

Перенесення джерела струму до контуру (рис. 2.13).

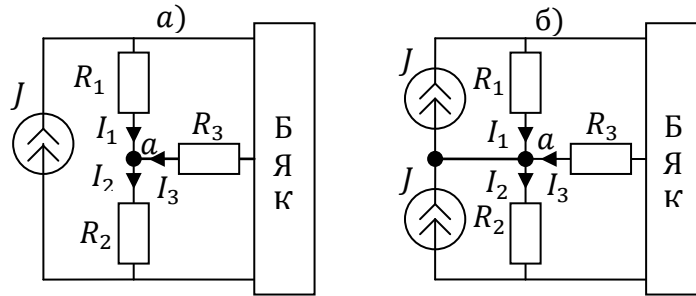


Рисунок 2.13

До основних методів розрахунку електричних кіл відносять: метод контурних струмів (МКС, Method contour currents) та метод вузлових напруг (МВН, Method node voltages).

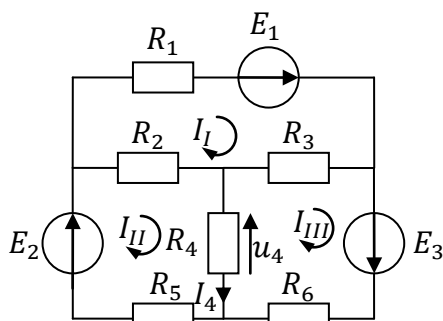


Рисунок 2.14

**МКС** полягає у тому, що замість струмів у гілках визначаються контурні струми, що проходять у контурах (рис. 2.14)

$$\begin{cases} (R_1 + R_2 + R_3)I_I - R_2I_{II} - R_3I_{III} = E_1; \\ -R_2I_I + (R_2 + R_4 + R_5)I_{II} - R_4I_{III} = E_2; \\ -R_3I_I - R_4I_{II} + (R_3 + R_4 + R_6)I_{III} = E_3. \end{cases}$$

Якщо у колі є кероване джерело, наприклад  $E_3 = \mu \cdot u_4$ , то його необхідно виразити через контурні струми

$$E_3 = \mu \cdot I_4 R_4 = \mu \cdot (I_{II} - I_{III}) R_4.$$

Джерело  $E_3$  необхідно перенести із правої частини рівняння у ліву частину, тоді третє рівняння набуде вигляду

$$-R_3I_I - (R_4 + \mu R_4)I_{II} + (R_3 + R_4 + R_6 + \mu R_4)I_{III} = 0.$$

При використанні матричної форми запису системи рівнянь вираз напруги  $E_3$ , записується у третій рядок, а оскільки керується струмами  $I_{II}$  та  $I_{III}$ , то записується відповідно у другий та третій стовпчик. Якщо у колі є інший вид керованого джерела, то його необхідно виразити через контурні струми.



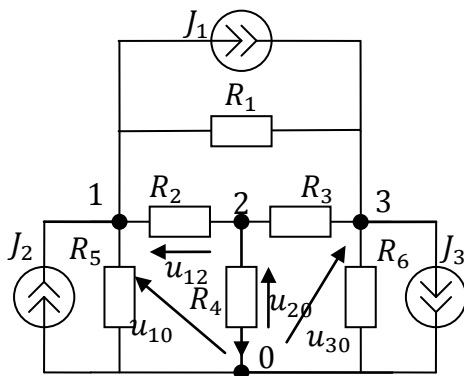


Рисунок 2.15

**МВН** полягає у тому, що визначаються напруги у вузлах кола відносно базисного вузла за першим законом Кірхгофа.

$$\begin{cases} (g_1 + g_2 + g_5)u_{10} - g_2u_{20} - g_1u_{30} = J_2 - J_1; \\ -g_2u_{10} + (g_2 + g_3 + g_4)u_{20} - g_3u_{30} = 0; \\ -g_1u_{10} - g_3u_{20} + (g_1 + g_3 + g_6)u_{30} = J_1 - J_3. \end{cases}$$

Спочатку краще всі джерела напруги перетворити на джерела струму (рис. 2.15).

Якщо у колі є кероване джерело, наприклад  $J_3 = S \cdot u_{12}$ , то його необхідно виразити через вузлові напруги

$$J_3 = S \cdot (u_{10} - u_{20}).$$

Джерело  $J_3$  необхідно перенести із правої частини рівняння у ліву частину, третє рівняння набуде вигляду

$$-(g_1 + S)u_{10} - (g_3 - S)u_{20} + (g_1 + g_3 + g_6)u_{30} = J_1.$$

При використанні матричної форми запису системи рівнянь вираз струму  $J_3$  записується у третій рядок, а оскільки керується напругами  $u_{10}$  та  $u_{20}$ , то записується відповідно у перший та другий стовпчик з відповідним знаком.



Рисунок 2.16

**Схемна функція** – це відношення реакції до дії (рис. 2.16).

До схемних функцій відносять: коефіцієнти передачі за струмом та напругою, вхідний опір та провідність, передавальні опір та провідність.

За матрицею опорів, що складена за МКС, та матрицею провідностей, що складена за МВН, можна визначити схемні функції:

за матрицею опорів	за матрицею провідностей
Коефіцієнт передачі за струмом	
$K_i = \frac{I_{BIX}}{I_{BX}} = \frac{\Delta_{ab}}{\Delta_{aa}}.$	$K_i = \frac{I_{BIX}}{I_{BX}} = \frac{\Delta_{ab}}{\Delta} \cdot Y_H.$
Коефіцієнт передачі за напругою	
$K_u = \frac{U_{BIX}}{U_{BX}} = \frac{\Delta_{ab}}{\Delta} \cdot Z_H.$	$K_u = \frac{U_{BIX}}{U_{BX}} = \frac{\Delta_{ab}}{\Delta_{aa}}.$
Вхідний опір	
$Z_{BX} = \frac{U_{BX}}{I_{BX}} = \frac{\Delta}{\Delta_{aa}}.$	$Z_{BX} = \frac{U_{BX}}{I_{BX}} = \frac{\Delta_{aa}}{\Delta}.$

### Принцип суперпозиції:

Реакція (струм чи напруга) лінійного кола на дію у вигляді кількох джерел дорівнює алгебраїчній сумі реакцій (часткових струмів чи напруг) на кожне джерело окремо.

При розрахунку струмів або напруг у гілках кола роблять наступне: по черзі розраховують струми або напруги, що виникають від дії кожної джерела напруги, замінюючи інші джерела їх внутрішніми опорами. Струм або напруги у гілках знаходять як алгебраїчну суму струмів або напруг від кожного джерела окремо.

### Теорема про еквівалентний генератор (the theorem about the equivalent generator):

Будь-який лінійний активний двополюсник (рис. 2.17 а) можна замінити джерелом напруги  $E_{\text{ЕГ}}$  із внутрішнім опором  $R_{\text{ЕГ}}$  (рис. 2.17 б), величини яких визначаються як:

а) напруга еквівалентного генератора  $E_{\text{ЕГ}} = U_{\text{ХХ}}$  між вузлами  $a$  та  $b$ ,

б) опір еквівалентного генератора  $R_{\text{ЕГ}} = U_{\text{ХХ}}/I_{\text{КЗ}}$ .

Опір  $R_{\text{ЕГ}}$  можна розрахувати за схемою, якщо відома її конфігурація. Величина цього опору визначається вхідним опором двополюсника, якщо всі джерела замінити їх внутрішніми опорами при розімкненій гілці  $ab$ .

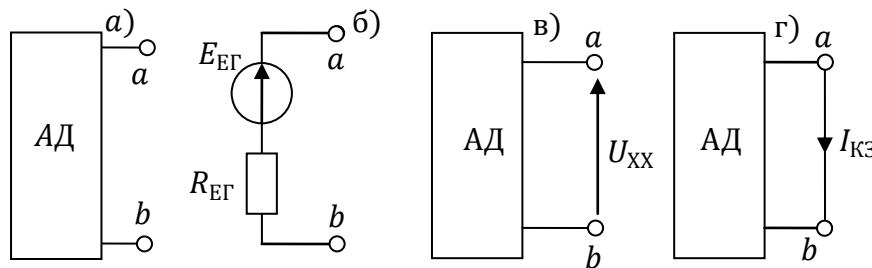


Рисунок 2.17

Умова передачі максимальної потужності у навантаження (рис. 2.18)

$$P_{\text{max}} = \frac{E^2}{4r_{\text{H}}}, \quad r_{\text{Г}} = r_{\text{H}}, \quad \text{коли } r_{\text{H}} = \text{var};$$

$$P_{\text{max}} = \frac{E^2}{r_{\text{H}}}, \quad X_{\text{H}} = X_{\text{Г}}, \quad r_{\text{Г}} = 0 \quad \text{зколи } r_{\text{Г}} = \text{var}.$$

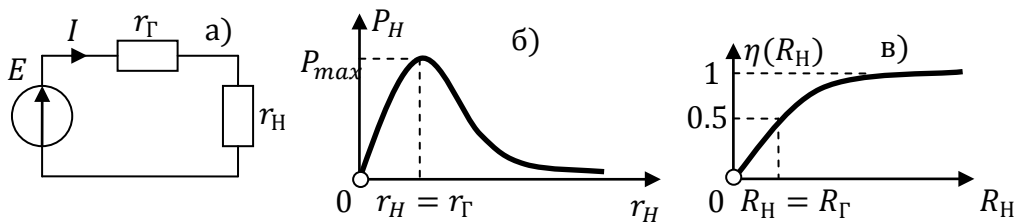


Рисунок 2.18

### **Принцип взаємності:**

Якщо у  $k$ -му контурі деякого пасивного кола ввімкнене джерело  $E_k$ , що викликає у  $m$ -му контурі струм  $I_m$  (рис. 2.19 а), то теж джерело, перенесене у  $m$ -й контур викличе у  $k$ -му контурі струм тієї ж величини та фази (рис. 2.19 б)

$$\frac{I_m}{I_k} = \frac{E_k}{E_m}.$$

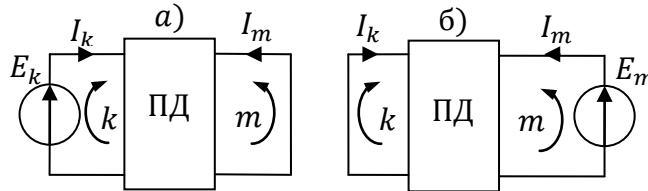


Рисунок 2.19

### **Теорема компенсації:**

Струми у колі не зміняться, якщо будь-який пасивний елемент на деякій ділянці замінити джерелом  $E_{ЕК}$ , що дорівнює за величиною напрузі на даній ділянці кола та спрямоване назустріч струму, що проходить по цій ділянці.

## **2.2. Гармонічний струм**

**Змінний струм** (alternating current) – струм, який змінюється у часі за величиною.

Середнє значення (average value) змінного струму

$$I_{\text{СЕР}} = \frac{\int_{t_1}^{t_2} i(t) dt}{t_2 - t_1}.$$

Під діючим значенням (effective value) періодичного струму (рис. 2.20) розуміють таке значення постійного струму при якому за один і той же час на опорі  $R$  виділиться одна й та ж сама енергія, а найменші проміжки часу, через які ці повторення спостерігаються – періодом  $T$ .

$$I_D = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i^2(t) dt}.$$

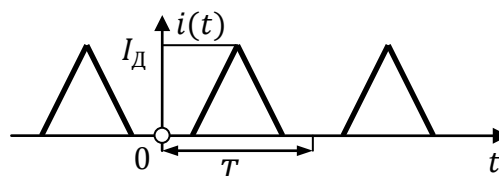


Рисунок 2.20

**Гармонічний струм (напруга)** – це періодичний струм (напруга), що є гармонічною функцією часу (рис. 2.21).

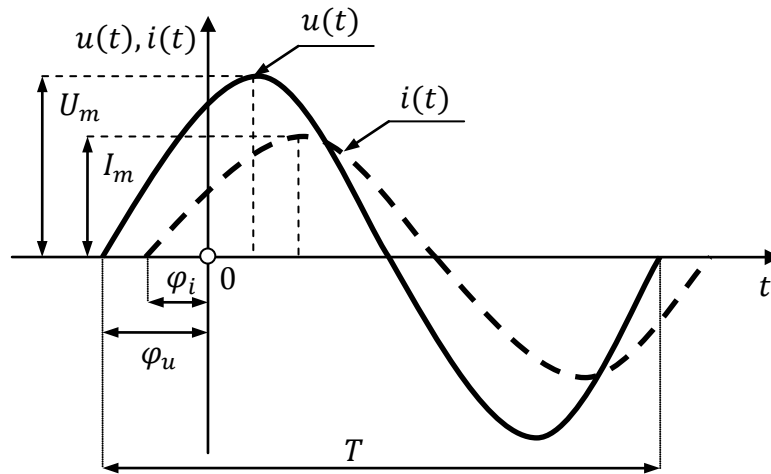


Рисунок 2.21

Миттєві значення (instantaneous value) струму та напруги:

$$i(t) = I_m \cos(\omega t + \varphi_i); \quad u(t) = U_m \cos(\omega t + \varphi_u),$$

де  $I_m$  – амплітуда (amplitude) струму,  $U_m$  – амплітуда напруг,  $\omega$  – кутова частота,  $\varphi_i$  – початкова фаза (initial phase) струму,  $\varphi_u$  – початкова фаза напруги.

Кутова частота (circular frequency) обчислюється за формулою

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f.$$

Частота струму  $f$  зв'язана з періодом  $T$  залежністю  $f = 1/T$ .

Якщо необхідно знайти різницю фаз між двома гармонічними струмами (напругами), то користуються поняттям зсув фази:

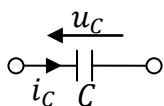
$$\varphi = \varphi_u - \varphi_i.$$

Діюче значення гармонічного струму, напруги та ЕРС визначається

$$U_D = \frac{U_m}{\sqrt{2}}, \quad I_D = \frac{I_m}{\sqrt{2}}, \quad E_D = \frac{E}{\sqrt{2}}.$$

**Ємність (capacitance)** визначається

$$C = \frac{q}{u}.$$



Умовне зображення ємності наведене на рис. 2.22.

Рисунок 2.22 Одиницею виміру є фарада (Ф).

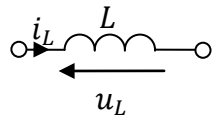
У разі лінійності ємності струм та напруга

$$i_c = C \frac{du_c}{dt}; \quad u_c = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i_c dt.$$

Миттєва енергія електричного поля, що накопичується на ємності

$$w_c(t) = \int_{-\infty}^t p(t) dt = \frac{Cu^2}{2}.$$

**Індуктивність (inductance)** позначається  $L$  (рис. 2.23) та вимірюється у генрі (Гн).



Індуктивність кількісно визначається відношенням потокозчеплення  $\psi$ , до струму, що створює магнітне поле

$$L = \frac{\psi}{i}.$$

Рисунок 2.23

У разі лінійної індуктивності напруга та струм

$$u_L = L \frac{di_L}{dt}; \quad i_L = \frac{1}{L} \int_{-\infty}^t u_L dt.$$

Миттєва потужність, що надходить в індуктивність

$$w_L(t) = \int_{-\infty}^t p(t) dt = \frac{Li^2}{2}.$$

**Векторна діаграма (Vector diagram)** – це графічне зображення змінної за гармонічним законом (синуса або косинуса) величин та співвідношень між ними за допомогою направлених відрізків – векторів (рис. 2.24).

Якщо є два гармонічні струми (рис. 2.24 б)  $i_1(t) = I_1 \cos(\omega t + \varphi_1)$  та  $i_2(t) = I_2 \cos(\omega t + \varphi_2)$ , що втікають в один вузол. За першим законом Кірхгофа загальний струм визначається

$$i(t) = i_1(t) + i_2(t) = I_1 \cos(\omega t + \varphi_1) + I_2 \cos(\omega t + \varphi_2).$$

Ці струми можна зобразити векторами на комплексній площині та додати їх за правилом паралелограма (рис. 2.24 а)

$$i(t) = I \cos(\omega t + \varphi).$$

Із діаграми бачимо, що

$$I = \sqrt{(a_1 + a_2)^2 + (b_1 + b_2)^2};$$

$$\varphi = \arctg \left( \frac{b_1 + b_2}{a_1 + a_2} \right).$$

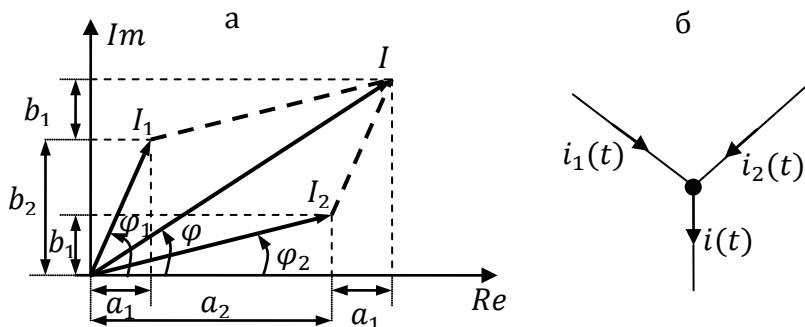


Рисунок 2.24

Для гармонічного струму  $i(t) = I_m \cos(\omega t + \varphi)$  визначимо напруги у колі (рис. 2.25).

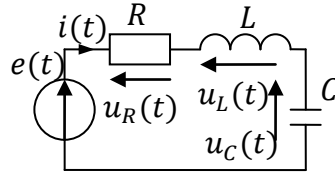


Рисунок 2.25

$$u_R(t) = i(t) \cdot R = I_m \cdot R \cos(\omega t + \varphi_i) = U_{mR} \cos(\omega t + \varphi_u),$$

$$u_L(t) = L \frac{di(t)}{dt} = -\omega L I_m \sin(\omega t + \varphi_i) = U_{mL} \cos(\omega t + \varphi_i + \frac{\pi}{2})$$

$$u_C(t) = \frac{1}{C} \int i(t) dt = \frac{1}{\omega C} I_m \sin(\omega t + \varphi_i) = U_{mC} \cos(\omega t + \varphi_i - \frac{\pi}{2})$$

Отже,  $U_{mR} = I_m \cdot R$  – це амплітудне значення напруги на опорі;  $U_{mL} = \omega L I_m = X_L I_m$  – це амплітудне значення напруги в індуктивності, а  $X_L = \omega L$  – індуктивний опір (inductive resistance);  $U_{mC} = I_m 1/(\omega C)$  – це амплітудне значення напруги на ємності, а  $X_C = 1/(\omega C)$  – ємнісний опір (capacitive resistance).

Графічне зображення напруг та струмів на комплексній площині, що називають векторною діаграмою (рис. 2.26). На рис. 2.26 а подана векторна діаграма кола, коли  $u_L > u_C$ , а на рис. 2.26 б –  $u_L < u_C$ .

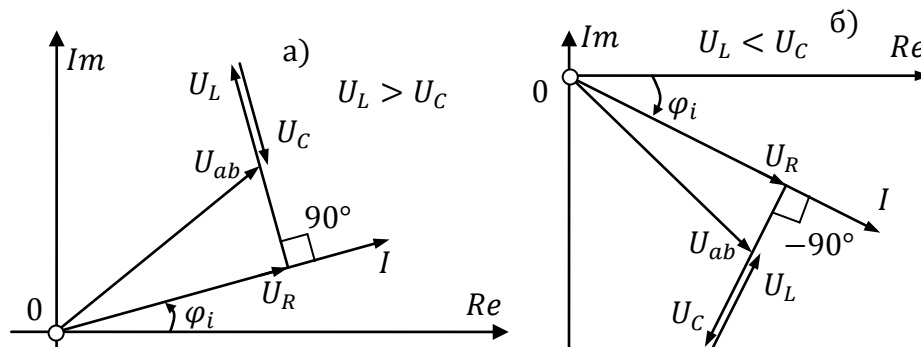


Рисунок 2.26

Комплексні та реактивний індуктивний та ємнісний опори:

$$Z_L = j\omega L = jX_L = X_L e^{j90^\circ};$$

$$Z_C = \frac{1}{j\omega C} = -j \frac{1}{\omega C} = -jX_C = X_C e^{-j90^\circ}.$$

Комплексна та реактивна індуктивна та ємнісна провідності:

$$Y_L = \frac{1}{Z_L} = \frac{1}{j\omega L} = -j \frac{1}{\omega L} = -jB_L = B_L e^{-j90^\circ};$$

$$Y_C = \frac{1}{Z_C} = j\omega C = jB_C = B_C e^{j90^\circ}.$$

**Метод комплексних амплітуд (the method of complex amplitudes)** – це метод розрахунку лінійних електричних кіл, що містять реактивні елементи в усталеному гармонічному режимі. Суть методу полягає у тому, що для всіх

реактивних елементів визначається їх комплексний імпеданс, всі струми та напруги представляються комплексними амплітудами.

Продиференціюємо поточний комплекс напруги

$$\frac{d\dot{U}(t)}{dt} = \frac{d}{dt} [Ue^{j(\omega t + \varphi)}] = j\omega Ue^{j(\omega t + \varphi)} = j\omega U(t).$$

Проінтегруємо поточний комплекс

$$\int \dot{U}(t) dt = \int Ue^{j(\omega t + \varphi)} dt = \frac{U}{j\omega} e^{j(\omega t + \varphi)} = \frac{\dot{U}(t)}{j\omega}.$$

Операції диференціювання у часовій області у комплексній області відповідає множенню на  $j\omega$ , а операції інтегрування у часовій області у комплексній області відповідає діленням на  $j\omega$ .

**Закон Ома (Ohm's Law)** у комплексній формі

$$\dot{I}_m = \frac{\dot{U}_m}{Z(\omega)},$$

де  $Z(\omega) = R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}$ .

Вираз  $Z(\omega)$  називають повним комплексним опором кола або імпедансом. Його можна переписати у показниковій формі  $Z(\omega) = |Z|e^{j\varphi}$ .

Модуль  $|Z|$  та аргумент  $\varphi$  комплексного опору визначаються

$$|Z| = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}; \quad \varphi = \arctg\left(\frac{X_L - X_C}{R}\right).$$

Аналогічно вводяться поняття повної  $Y$ , активної  $G$  та реактивної  $B$  провідностей (reactive conductivity). Отже, повна провідність визначається  $Y = G + jB$  та вимірюється у сіменсах (Сім).

**Імпеданс** (impedance) – повний комплексний опір кола.

**Адмітанс** (admittans) – повна комплексна провідність кола.

**Імітанс** (imitans) – це узагальнене поняття імпеданса та адмітанса, з яким не пов'язані одиниці виміру.

**Кондуктанс** (konduktans) – це дійсна частина адмітанса, **сусцептанс** – це уявна частина адмітанса.

**Перший закон Кірхгофа (the first law Kirchhoff):**

Алгебраїчна сума комплексних амплітуд струмів (чи комплексних струмів) у вузлі дорівнює нулю

$$\sum \dot{I}_k = 0, \quad \sum \dot{I}_{mk} = 0.$$

**Другий закон Кірхгофа** алгебраїчна сума спаду комплексних амплітуд напруг на активних і реактивних елементах будь-якого контуру дорівнює алгебраїчній сумі комплексних ЕРС, які діють в цьому контурі

$$\sum \dot{U}_k = \sum \dot{E}_p, \quad \sum \dot{U}_{mk} = \sum \dot{E}_{mp}.$$

Правила запису рівнянь залишаються такими, як і для електричних кіл постійного струму.

Повна **потужність (full power)** визначається

$$S = \frac{U_m \cdot I_m^*}{2} = \frac{U_m \cdot I_m^*}{2} \cos \varphi + j \frac{U_m \cdot I_m^*}{2} \sin \varphi = P + jQ,$$

де  $P = U_m \cdot I_m^* \cos \varphi / 2$  – це активна потужність;  $Q = U_m \cdot I_m^* \sin \varphi / 2$  – це реактивна потужність;  $I_m^* = I_m e^{-j\varphi}$  – спряжений комплекс струму.

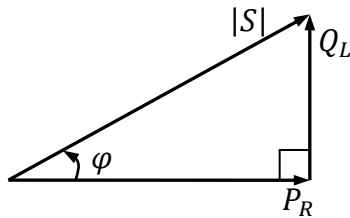


Рисунок 2.27

Графічне зображення залежності між повною  $S$ , активною  $P$  і реактивною  $Q$  потужностями називають трикутником потужностей (рис. 2.27)

$$|S| = \sqrt{P^2 + Q^2}.$$

Коефіцієнти потужності:

$$K_P = \cos \varphi = \frac{P}{|S|}.$$

**Закон балансу потужностей** (Power balance law)

$$\sum S_E + \sum S_J = \sum S_{\text{СПОЖ}};$$

$$\sum_{k=1}^{Ne} \dot{E}_k \dot{I}_k^* + \sum_{t=1}^{Nj} \dot{E}_t \dot{I}_t^* = \sum_{a=1}^{Na} |\dot{I}_a|^2 R_a + j \left( \sum_{b=1}^{NL} |\dot{I}_b|^2 X_{L.b} - \sum_{d=1}^{Nc} |\dot{I}_d|^2 X_{C.d} \right).$$

**Добротність гілки (branch quality)** – це відношення із точністю до коефіцієнту  $2\pi$  максимально запасеної енергії до енергії, що витрачається за період

$$Q_X = 2\pi \frac{W_{\max}}{W_{RT}}.$$

Таким чином, добротність гілки визначається

$$Q_X = \frac{Q}{P} = \frac{I^2 X}{I^2 R} = \frac{X}{R}.$$

**Передача максимальної активної потужності у навантаження**

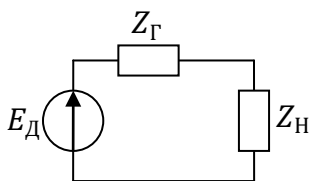


Рисунок 2.28

У колі (рис. 2.28) комплексні опори генератора  $Z_\Gamma$  та навантаження  $Z_H$ :  $Z_\Gamma = R_\Gamma + jX_\Gamma$ ,  $Z_H = R_H + jX_H$ .

На вході кола діє гармонічна напруга

$$e(t) = E_m \cos(\omega t + \varphi).$$

Умова передачі максимальної потужності у навантаженні

$$P_{\max} = \frac{E_D^2}{4R_H}, \quad Z_H = Z_\Gamma^* \text{ за умови, що } Z_H \text{ змінне};$$

$$P_{\max} = \frac{E_D^2}{R_H}, \quad X_H = X_\Gamma, \quad R_\Gamma = 0 \text{ за умови, що } Z_\Gamma \text{ змінне}.$$



**Кола із індуктивно зв'язаними елементами** – це кола, в яких при зміні у часі струмів індуктивних елементів, що здійснюють взаємний вплив один на одного (рис. 2.29).

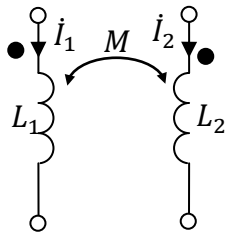


Рисунок 2.29

Взаємна індуктивність  $M$  вимірюють у генрі (Гн), є кількісною характеристикою явища взаємної індукції.

Коефіцієнта індуктивного зв'язку (inductive coupling coefficient)

$$k = \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}},$$

де  $L_1$  та  $L_2$  - індуктивності котушок, між якими існує взаємоіндуктивний зв'язок.

Опір взаємоіндукції (mutual induction resistance)  $X_M = \omega M$ .

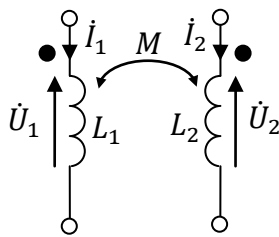


Рисунок 2.30

Узгоджене протікання струмів (рис. 2.30).

Напруга

$$u_1 = L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt},$$

$$\dot{U}_1 = j\omega L_1 \dot{I}_1 + j\omega M \dot{I}_2.$$

$$\text{Опір } Z_{Y3} = j(X_L + X_M).$$

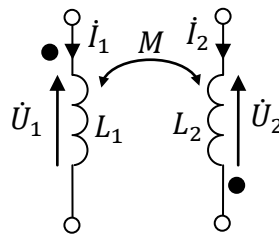


Рисунок 2.31

Неузгоджене протікання струмів (рис. 2.31).

Напруга

$$u_1 = L_1 \frac{di_1}{dt} - M \frac{di_2}{dt},$$

$$\dot{U}_1 = j\omega L_1 \dot{I}_1 - j\omega M \dot{I}_2.$$

$$\text{Опір } Z_{\text{НЕУЗ}} = j(X_L - X_M).$$

У колі (рис. 2.32 а) за узгодженого протікання струмів магнітні зв'язки можна замінити керованими джерелами (рис. 2.32 б) або виконати розв'язку (рис. 2.32 в).

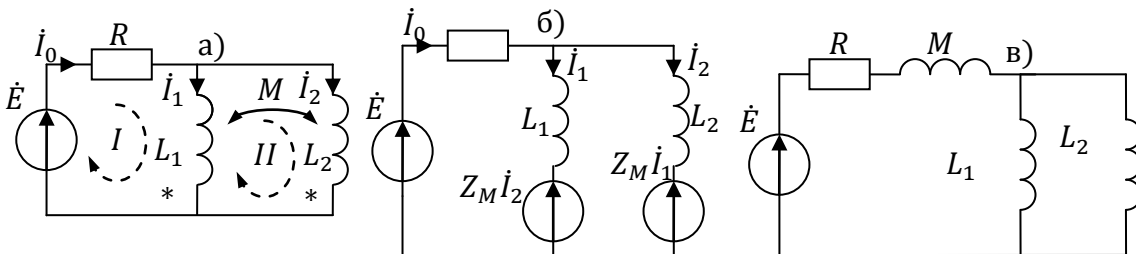


Рисунок 2.32

**Трансформатор** (transformer) – прилад, що призначений для передачі енергії із однієї частини схеми у іншу через взаємоіндукцію.

На рис. 2.33 а подана двоконтурна схема заміщення трансформатора

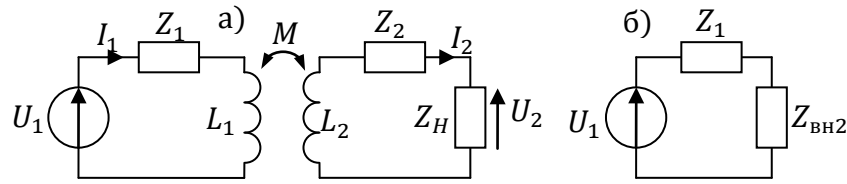


Рисунок 2.33

Коефіцієнт трансформації (coefficient of transformation) ідеального трансформатора (трансформатор, у якого немає втрат та немає розсіювання)

$$n = \frac{\dot{U}_2}{\dot{U}_1} = \frac{\dot{I}_1}{\dot{I}_2}.$$

Якщо  $n > 1$ , то трансформатор підвищуючий, та коли  $n < 1$  – понижаючий.

Запишемо систему рівнянь, що описує трансформатор (рис. 2.33 а):

$$\begin{cases} \dot{U}_1 = Z_1 \dot{I}_1 + jx_{L1} \dot{I}_1 \pm jx_{3B} \dot{I}_2; \\ 0 = Z_2 \dot{I}_2 + jx_{L2} \dot{I}_2 \pm jx_{3B} \dot{I}_1. \end{cases}$$

Двоконтурну трансформаторну схему (two-circuit transformer schema) можна звести до одноконтурної по відношенню до першого контуру (рис. 2.33 б), параметри якої визначаються

$$Z_{BH2} = \frac{x_{3B}^2}{R_2 + jx_{L2}} = \frac{x_{3B}^2}{|R_2 + jx_{L2}|^2} R_2 - j \frac{x_{3B}^2}{|R_2 + jx_{L2}|^2} x_2 = R_{BH2} + jX_{BH2},$$

де

$$R_{BH2} = \frac{x_{3B}^2}{|R_2 + jx_{L2}|^2} R_2 = \frac{x_{3B}^2}{|Z_2|^2} R_2;$$

$$X_{BH2} = -\frac{x_{3B}^2}{|R_2 + jx_{L2}|^2} x_2 = -\frac{x_{3B}^2}{|Z_2|^2} x_2.$$

### 2.3. Коливальні контури

**Резонанс** (resonance) – це явище багатократного збільшення амплітуди системи, коли частота дії генератора співпадає із власною частотою контуру.

Розрізняють резонанс напруг (the voltage resonance), що спостерігається у контурі послідовного живлення (рис. 2.34 а) та резонанс струмів (the current resonance), що спостерігається у контурі паралельного живлення (рис. 2.34 б).

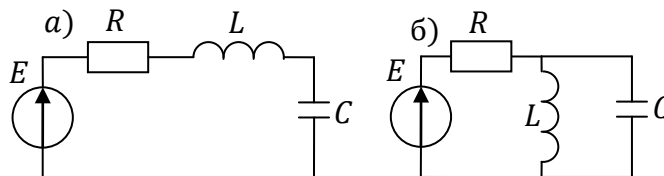


Рисунок 2.34

Резонансна частота (the resonant frequency)

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}, \quad f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi}.$$

Характеристичний опір (the characteristic impedance)

$$\rho = \omega_0 L = \frac{1}{\omega_0 C} = \sqrt{\frac{L}{C}} = \sqrt{X_L \cdot X_C}.$$

Абсолютна розстройка

$$\Delta\omega = \omega - \omega_0.$$

Відносна розстройка

$$\delta = \frac{\Delta\omega}{\omega_0}.$$

Узагальнена розстройка

$$\xi = \frac{X}{R} \cong 2Q\delta = 2Q \frac{\Delta\omega}{\omega_0} = Q\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right).$$

Вхідний опір послідовного контуру

$$Z_{BX, ПОСЛ.} = r + jX = r \left(1 + j\frac{X}{R}\right) = r(1 + j\xi) = r\sqrt{1 + \xi^2} e^{j \arctg \xi}.$$

Модуль  $|Z_{BX}(\omega)|$  та аргумент  $\varphi_Z(\omega)$  зобразимо на окремо у вигляді АЧХ (рис. 2.35 а) та ФЧХ (рис. 2.35 б).

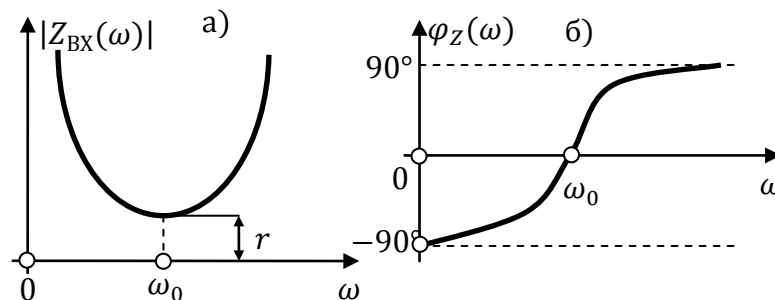


Рисунок 2.35

Добротність (the quality) для послідовного контуру

$$Q = \frac{U_C}{U_R} = \frac{U_L}{U_R} = \frac{X}{R} = \frac{\rho}{R}.$$

**Смуга пропускання** (bandwidth) - це діапазон зміни частоти, у якому АЧХ резонансної кривої  $A(\omega)$  не опускається нижче максимального значення, поділеного на  $\sqrt{2}$  (рис. 2.36 а).

$$\Pi = \frac{\omega_0}{Q} = 2\Delta\omega.$$

У якості резонансної кривої  $A(\omega)$  може бути резонансна крива струму або напруги.

**Смуга пропускання** (bandwidth) по потужності - це діапазон зміни частоти, у якому АЧХ резонансної кривої потужності  $P(\omega)$  не опускається нижче максимального значення, поділеного на 2 (рис. 2.36, б).

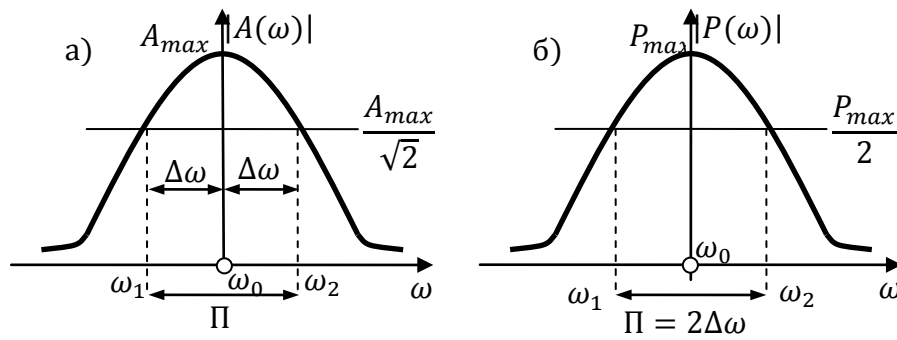


Рисунок 2.36

Вхідний опір паралельного контуру першого виду (рис. 2.37 а)

$$Z_{BX,ПАР.1} = \frac{R_E}{1 + j\xi} = \frac{R_E}{\sqrt{1 + \xi^2}} e^{-j \arctg \xi} = \frac{Q \cdot \rho}{\sqrt{1 + \xi^2}} e^{-j \arctg \xi}.$$

**Добротність паралельного контуру** – це відношення струму на індуктивності чи ємності до вхідного струму на резонансній частоті

$$Q = \frac{I_L}{I_R} = \frac{I_C}{I_R} = \frac{I_L}{J} = \frac{I_C}{J} = \frac{R}{\rho}.$$

Модуль  $|Z_{BX}(\omega)|$  та аргумент  $\varphi_Z(\omega)$  зобразимо на окремо у вигляді АЧХ (рис. 2.37 б) та ФЧХ (рис. 2.37 в).

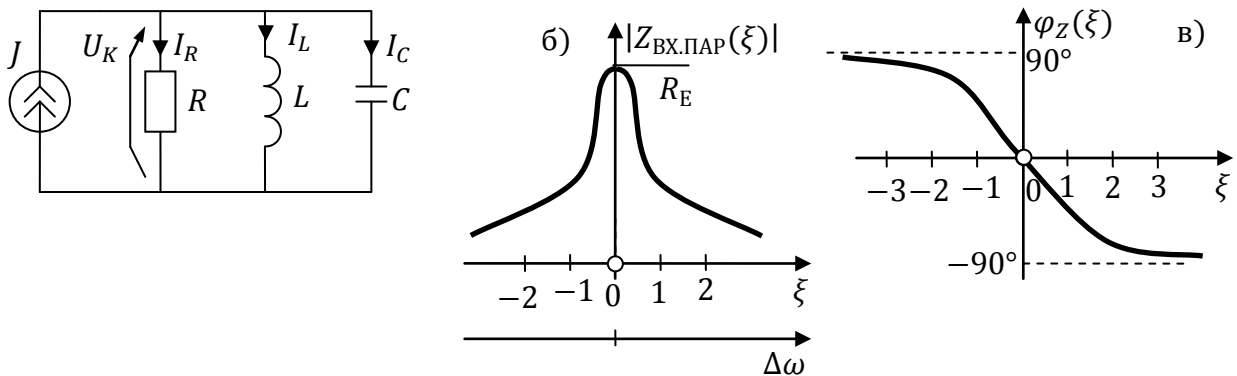


Рисунок 2.37

Паралельні коливальні контури бувають трьох видів (рис. 2.38).

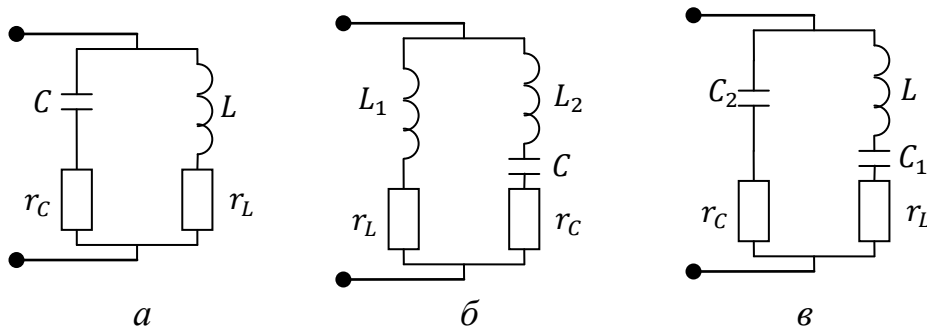


Рисунок 2.38

Вхідний опір паралельного контуру другого та третього виду

$$Z_{BX,ПАР.2} = p^2 \frac{Q_X \cdot \rho}{(1 + j\xi)} = \frac{p^2 R_E}{(1 + j\xi)}$$

Якщо  $R_H \gg X_C$ , тоді одержуємо такі вирази внесеного опору

$$r_{BH} \cong \frac{R_H \cdot X_C^2}{R_H^2} = \frac{X_C^2}{R_H}, \quad x_{BH} \cong \frac{X_C \cdot R_H^2}{R_H^2} = X_C.$$

**Внесений опір** (resistance introduced) – це активний опір, що вноситься у контур зі сторони навантаження або зі сторони генератора (рис. 2.39)

$$r_{BH.H} = \frac{X^2}{r_H} = \frac{\rho^2}{r_H}; \quad r_{BH.\Gamma} = \frac{X^2}{r_\Gamma} = \frac{\rho^2}{r_\Gamma}.$$

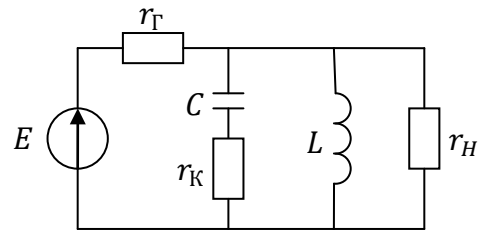


Рисунок 2.39

**Коефіцієнт включення** (switching factor) – це величина, що показує до якої частини реактивності ввімкнений активний опір

$$p = \frac{X_2}{X_1 + X_2} = \frac{X_2}{X} = \frac{X_2}{\rho}.$$

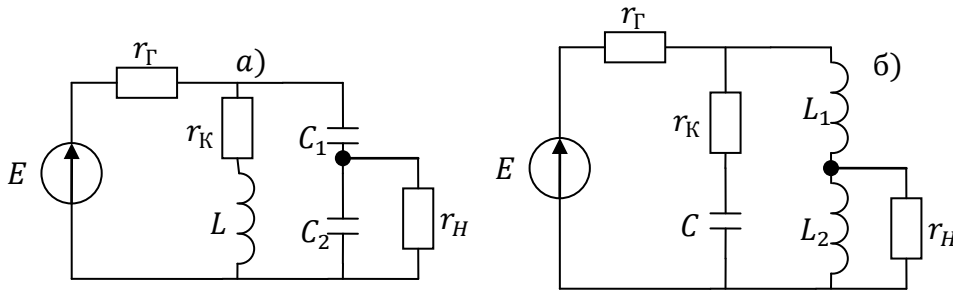


Рисунок 2.40

У такому випадку внесений опір визначається

$$r_{BH} = \frac{p^2 \rho^2}{R_H}.$$

Внесений опір із другого контуру у перший

$$Z_{BH} = \frac{X_{3B}^2}{Z_{22}} = \frac{X_{3B}^2}{|R_2 + jX_{L2}|^2} R_2 - j \frac{X_{3B}^2}{|R_2 + jX_{L2}|^2} X_2 = R_{BH2} + jX_{BH2}.$$

## 2.4. Схемні функції та чотиріполюсники

**Схемна функція** (circuit function) – це відношення операторних зображень реакції до дії.

Апарат схемних функцій застосовується як для аналізу кіл на постійному так, і гармонічному струмі, так і за довільної дії.

Схемі відповідає матриця еквівалентних параметрів, наприклад **Z** та **Y** (рис. 2.41), а значить за матрицею можна знаходити схемні функції.

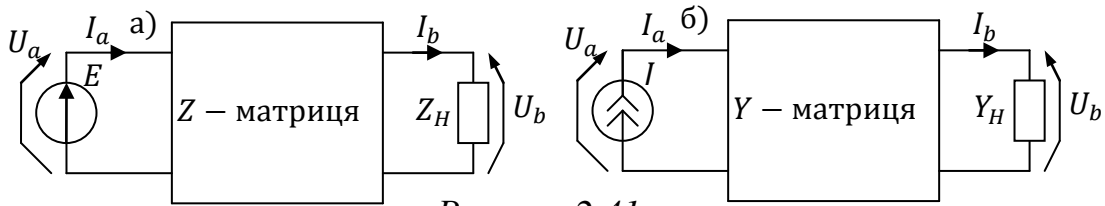


Рисунок 2.41

Коефіцієнт передачі за струмом:

за матрицею опорів	за матрицею провідностей
$K_i = \frac{I_{BIX}}{I_{BX}} = \frac{\Delta_{ab}}{\Delta_{aa}}$	$K_i = \frac{I_{BIX}}{I_{BX}} = \frac{\Delta_{ab}}{\Delta} \cdot Y_H$

Коефіцієнт передачі за напругою

за матрицею опорів	за матрицею провідностей
$K_u = \frac{U_{BIX}}{U_{BX}} = \frac{\Delta_{ab}}{\Delta} \cdot Z_H$	$K_u = \frac{U_{BIX}}{U_{BX}} = \frac{\Delta_{ab}}{\Delta_{aa}}$

Перехідна провідність

за матрицею опорів	за матрицею провідностей
$Y_{ba} = \frac{I_{BIX}}{U_{BX}} = \frac{\Delta_{ab}}{\Delta}$	$Y_{ba} = \frac{I_{BIX}}{U_{BX}} = \frac{\Delta_{ab}}{\Delta_{aa}} \cdot Y_H$

Перехідний опір

за матрицею опорів	за матрицею провідностей
$Z_{ba} = \frac{U_{BIX}}{I_{BX}} = \frac{\Delta_{ab}}{\Delta_{aa}} \cdot Z_H$	$Z_{ba} = \frac{U_{BIX}}{I_{BX}} = \frac{\Delta_{ab}}{\Delta}$

Вхідний опір

за матрицею опорів	за матрицею провідностей
$Z_{BX} = \frac{U_{BX}}{I_{BX}} = \frac{\Delta}{\Delta_{aa}}$	$Z_{BX} = \frac{U_{BX}}{I_{BX}} = \frac{\Delta_{aa}}{\Delta}$

Численні електротехнічні пристрої, що призначені для перетворення та пересилання електричної енергії, мають два вхідних та вихідних затискачі, при цьому їх внутрішнє електричне коло може бути довільної складності називають **чотириполюсниками** (ЧТП, four-terminal circuit). Більш докладно будемо розглядати прохідні чотириполюсники (одна пара полюсів – вхідні, інша – вихідні, рис. 2.42).

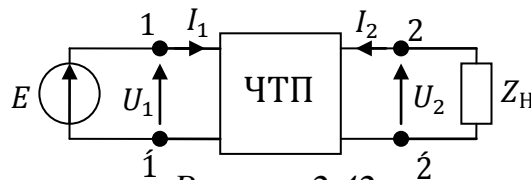


Рисунок 2.42

У силу лінійності можна написати шість систем рівнянь, що зв'язують між собою струми та напруги на вході та виході чотириполюсника.

 Система  $Y$  – параметрів чотириполюсників

$$\begin{cases} I_1 = Y_{11} \cdot U_1 + Y_{12} \cdot U_2, \\ I_2 = Y_{21} \cdot U_1 + Y_{22} \cdot U_2; \end{cases} \quad \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix}.$$

Система  $Z$  – параметрів чотириполюсника

$$\begin{cases} U_1 = Z_{11} \cdot I_1 + Z_{12} \cdot I_2, \\ U_2 = Z_{21} \cdot I_1 + Z_{22} \cdot I_2; \end{cases} \quad \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix}.$$

Система  $h$  – параметрів чотириполюсника

$$\begin{cases} U_1 = h_{11} \cdot I_1 + h_{12} \cdot U_2, \\ I_2 = h_{21} \cdot I_1 + h_{22} \cdot U_2; \end{cases} \quad \begin{bmatrix} U_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_1 \\ U_2 \end{bmatrix}.$$

Система  $A$  – параметрів чотириполюсника

$$\begin{cases} U_1 = A_{11} \cdot U_2 + A_{12} \cdot I_2, \\ I_1 = A_{21} \cdot U_2 + A_{22} \cdot I_2; \end{cases} \quad \begin{bmatrix} U_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_2 \\ I_2 \end{bmatrix}.$$

Коли розглядаються  $A$  - параметри, вихідний  $I_2$  струм направляють назовні.

Система  $B$  – параметрів чотириполюсника

$$\begin{cases} U_2 = B_{11} \cdot U_1 + B_{12} \cdot I_1, \\ I_2 = B_{21} \cdot U_1 + B_{22} \cdot I_1; \end{cases} \quad \begin{bmatrix} U_2 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_1 \\ I_1 \end{bmatrix}.$$

Система  $F$  – параметрів чотириполюсника

$$\begin{cases} I_1 = F_{11} \cdot U_1 + F_{12} \cdot I_2, \\ U_2 = F_{21} \cdot U_1 + F_{22} \cdot I_2; \end{cases} \quad \begin{bmatrix} I_1 \\ U_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} \\ F_{21} & F_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_1 \\ I_2 \end{bmatrix}.$$

Кожному параметру можна додати фізичний зміст.

$$h_{21} = \left. \frac{I_2}{I_1} \right|_{U_2=0} = K_i,$$

де  $h_{21}$  – коефіцієнт передачі за струмом при закороченому виході.

$$Y_{11} = \left. \frac{I_1}{U_1} \right|_{U_2=0} = Y_{\text{вх}},$$

де  $Y_{11}$  – вхідна провідність при закороченому виході.

$$Z_{11} = \left. \frac{U_1}{I_1} \right|_{I_2=0} = Z_{\text{вх}},$$

де  $Z_{11}$  – вхідний опір при холостому ході на виході.

Зв'язок  $Z$  - параметрів через  $Y$

$$Z_{11} = \frac{Y_{22}}{\Delta}, \quad Z_{12} = -\frac{Y_{12}}{\Delta}, \quad Z_{21} = -\frac{Y_{21}}{\Delta}, \quad Z_{22} = \frac{Y_{11}}{\Delta}.$$

Запишемо через матрицю

$$[Z] = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} Y_{22} & -Y_{12} \\ -Y_{21} & Y_{11} \end{bmatrix} = \frac{1}{Y_{11}Y_{22} - Y_{21}Y_{12}} \begin{bmatrix} Y_{22} & -Y_{12} \\ -Y_{21} & Y_{11} \end{bmatrix}.$$

Схеми заміщення пасивних чотириполюсників (рис. 2.43).

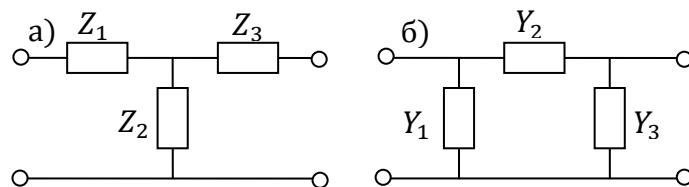


Рисунок 2.43

Для Т-подібної схеми заміщення (рис. 1.4 а) складають матрицю опорів

$$[Z] = \begin{bmatrix} Z_1 + Z_2 & Z_2 \\ Z_2 & Z_2 + Z_3 \end{bmatrix}.$$

Для П-подібної схеми заміщення (рис. 1.4 б) складають матрицю провідностей

$$[Y] = \begin{bmatrix} Y_1 + Y_2 & Y_2 \\ Y_2 & Y_2 + Y_3 \end{bmatrix}.$$

Запишемо систему  $h$ -параметрів чотириполюсника

$$\begin{cases} U_1 = h_{11} \cdot I_1 + h_{12} \cdot U_2, \\ I_2 = h_{21} \cdot I_1 + h_{22} \cdot U_2. \end{cases}$$

Розглянемо фізичний зміст  $h$ -параметрів (рис. 2.44)

$$h_{11} = \left. \frac{U_1}{I_1} \right|_{U_2=0} = Z_{BX},$$

$$h_{12} = \left. \frac{U_1}{U_2} \right|_{I_1=0} = \frac{1}{K_U},$$

$$h_{21} = \left. \frac{I_2}{I_1} \right|_{U_2=0} = K_I,$$

$$h_{22} = \left. \frac{I_2}{U_2} \right|_{I_1=0} = Y_{ВИХ},$$

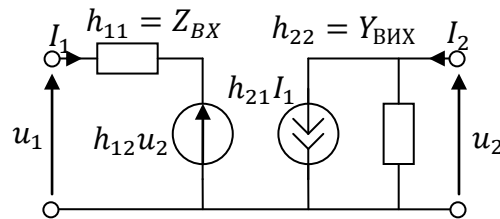


Рисунок 2.44

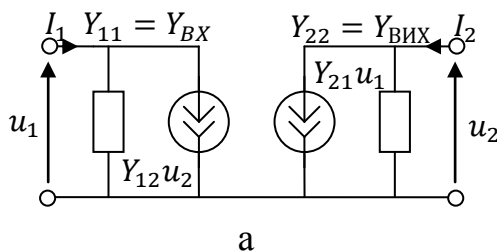
$h_{11}$  – вхідний опір у режимі короткого замикання виходу;

$h_{12}$  – коефіцієнт передачі напруги у режимі холостого ходу на вході;

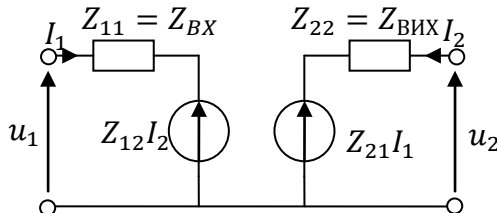
$h_{21}$  – коефіцієнт передачі струму у режимі короткого замикання на виході,

$h_{22}$  – вихідна провідність у режимі холостого ходу на вході.

Схема, що описує система  $Y$  – рівнянь чотириполюсника (рис. 2.45 а), а схема, що описує система  $Z$  – рівнянь чотириполюсника (рис. 2.45 б).



а



б

Рисунок 2.45

**Стійкість схемних функцій** (Stability of circuit functions). Перехідний процес, що виникає у колі за наявності комутацій може мати різний характер. У стійкого електричного кола при обмеженій дії цей процес із плином часу загасає і змінюється за законом  $f(t) = E_m e^{-t\alpha}$ . Схема буде нестійкою, коли  $\alpha < 0$ , тобто у такому колі реакція кола на обмежений вхідний сигнал буде необмежено збільшуватися, що приведе до виходу із ладу кола, оскільки через деякий час буде пробій. Втрата стійкості веде до порушення режиму роботи кола. Тому аналіз схемної функції на стійкість необхідна для забезпечення стійкого режиму. Для аналізу стійкості потрібно визначити розміщення коренів характеристичного рівняння на комплексній площині. Щоб схема була стійка, необхідно, щоб корені полінома знаменника знаходилися у правій півплощині (рис. 2.46).



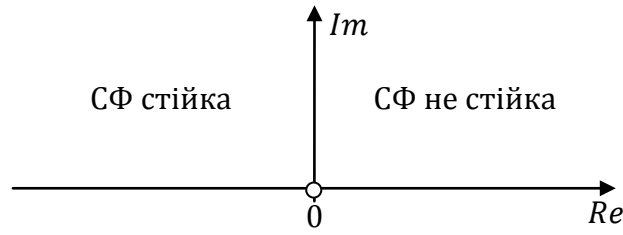


Рисунок 2.46

## 2.5. Перехідні процеси

У електричному колі (electrical circuit) можуть відбуватися комутації. Під **комутацією (switching)** будемо розуміти будь-які миттєві перемикання, наприклад, підключення одного елементу, блоку елементів або частини кола, зміна стрибком якогось із параметрів кола або блоку параметрів таких як амплітуда, початкова фаза джерел, номінали елементів або цілих гілок. За наявності реактивних елементів у колах можуть виникати перехідні процеси.

**Перехідним процесом (transition process)** називають процес, що виникає у електричному колі під час переходу кола від одного усталеного режиму до іншого.

Характер комутації, на схемі вказується за допомогою ключа зі стрілкою (рис. 2.47).

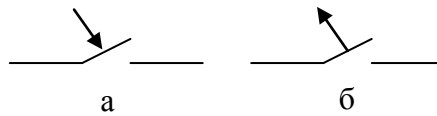


Рисунок 2.47 – Умовне зображення комутації

Усталений режим (steady state) визначається дією джерела енергії (energy source) та обумовлений енергетичним станом кола. За наявності реактивних елементів (індуктивностей та ємностей) перехід від одного усталеного режиму до іншого миттєво не відбувається. Це пов'язане із тим, що неможна розвинути нескінченну потужність.

Початком відліку для перехідного процесу вважають момент здійснення комутації та позначають його  $t = 0$ . У момент часу, що передує комутації, струми та напруги позначають  $i(0-)$ ,  $u(0-)$ , відразу після комутації –  $i(0+)$ ,  $u(0+)$ , у момент комутації –  $i(0)$ ,  $u(0)$ .

**Закони комутації (switching laws)** випливають із законів збереження енергії для магнітного та електричного полів.

**Перший закон комутації.** Струм в індуктивності і магнітний потік у момент комутації стрибком змінитися не можуть, а починають змінюватись від тих значень, які вони мали безпосередньо до комутації

$$i_L(0-) = i_L(0+) = i_L(0), \quad (1.1)$$

$$\psi_L(0-) = \psi_L(0+) = \psi_L(0). \quad (1.2)$$

**Другий закон комутації.** Напруга і заряд на ємності у момент комутації стрибком змінитися не можуть, а починають змінюватися від тих значень, які б вони мали безпосередньо до комутації

$$u_C(0-) = u_C(0+) = u_C(0), \quad (1.3)$$

$$q_C(0-) = q_C(0+) = q_C(0). \quad (1.4)$$

**Класичний метод (the classic method)** аналізу полягає у тому, що для кола після комутації складається система рівнянь або рівняння на основі будь-яких методів аналізу електричних кіл та зводиться до лінійного неоднорідного диференційного рівняння відносно шуканих змінних

$$a_n \frac{d^n x(t)}{dt^n} + \dots + a_1 \frac{dx(t)}{dt} + a_0 x(t) = f(t). \quad (1.5)$$

У якості шуканих змінних доцільно обирати струм в індуктивності та напругу на ємності, щоб надалі можна було б використати закони комутації.

Розв'язання такого рівняння

$$u_C = u_{C.ВИМ} + u_{C.ВІЛ}, \quad (1.6)$$

де  $u_{C.ВИМ}$  – власне розв'язання лінійного неоднорідного рівняння;  $u_{C.ВІЛ}$  – загальне розв'язання лінійного однорідного.

Складова  $u_{C.ВІЛ}$  описує поведінку кола у відсутності джерел та називається вільною складовою, а  $u_{C.ВИМ}$  залежить від джерел та називається вимушеною складовою.

Вигляд вільної складової

$$x_{ВІЛ}(t) = \sum_{i=1}^m A_i t^{k-i} e^{\lambda_i t} + \sum_{k=m+1}^n A_k e^{\lambda_k t}, \quad (1.7)$$

де  $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_m$ ,  $m < n$

Незалежними початковими умовами назвемо значення змінних струмів в індуктивностях і напруг на ємностях при  $t = 0$ , тобто ті величини, які у момент комутації не змінюються стрибком.

**Характеристики перехідного процесу**

**Стала часу кола (time constant circuit)** визначається коренями характеристичного рівняння та показує час, протягом якого вільна складова струму, загасаючи, зменшується у  $e$  раз у порівнянні зі своїм початковим значенням  $i_{L.ВІЛ}(0)$

$$\tau = \frac{1}{|p|} = i_{ВІЛ}(\tau) = i_{ВІЛ}(0)e^{-1} = \frac{i_{ВІЛ}(0)}{e} = \frac{A}{e}, \quad (1.8)$$

де  $|p|$  – це найменше за модулем корень характеристичного рівняння

Теоретично перехідний процес триває нескінченно довго. Практично його можна обмежити розглядом інтервалу часу, за межами якого вільний струм та напруга стають несуттєвими. Записавши значення вільної складової у момент комутації за 100% розрахуємо інтенсивність її загасання (таблиця 2.1)

Таблиця 2.1

t	0	1τ	2τ	3τ	4τ	5τ
i <sub>ВИМ</sub> , %	100	36.79	13.53	4.98	1.83	0.67

**Коефіцієнт загасання кола** (the damping factor circuit) – величина зворотна сталій часу кола

$$\alpha = \frac{1}{\tau}. \quad (1.9)$$

**Операторний метод** (the operator methods) розрахунку перехідних процесів полягає у тому, що використовується перетворення Лапласа, що дозволяє перенести розв'язання з області функції дійсної змінної  $t$  у область комплексної змінної  $p$ .

Пряме перетворення Лапласа (the direct Laplace transform)

$$F(p) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-pt} dt = L\{f(t)\}, \quad (1.10)$$

де  $f(t)$  – функція дійсної змінної  $t$  при  $t > 0$  (при  $t < 0$ ,  $f(t) = 0$ ).

Зворотне перетворення Лапласа (the inverse Laplace transform)

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\cdot\infty}^{\sigma+j\cdot\infty} F(p)e^{pt} dp = L^{-1}\{F(p)\}. \quad (1.11)$$

Функцію  $F(p)$  називають зображенням за Лапласом, а функцію  $f(t)$  – оригіналом. Отже, оригінал і зображення являють собою пари функцій  $f(t)$  і  $F(p)$  дійсної та комплексної змінної, зв'язаних між собою парою перетворень Лапласа.

При такому перетворенні операція диференціювання над функцією дійсної змінної  $f(t)$ , замінюється операцією множення на оператор  $p$  функції комплексної змінної  $F(p)$ . У свою чергу, операція інтегрування замінюється операцією ділення на оператор  $p$ .

### **Основні властивості перетворення Лапласа (the main properties of Laplace transformation)**

Диференціювання оригіналу (differentiation of the original) при ненульових початкових умовах

$$\frac{df(t)}{dt} \div pF(p) - f(0). \quad (1.12)$$

Інтегрування оригіналу (the integration of the original)

$$\int_0^t f(t) dt \div \frac{F(p)}{p} - \frac{F(0)}{p}. \quad (1.13)$$

Зміна масштабу (теорема подоби)

$$f(at) = \frac{1}{a} F\left(\frac{p}{a}\right). \quad (1.14)$$

де  $a$  – постійний дійсний коефіцієнт.

Зсув в області дійсної змінної

$$f(t + t_0) = F(p)e^{pt_0}. \quad (1.15)$$

Зсув в області комплексній змінної

$$F(p \mp \lambda) = f(t)e^{\pm \lambda t}. \quad (1.16)$$

Згортку двох функцій відповідає добуток зображень

$$\begin{aligned} f_1(t) * f_2(t) &= \int_0^{\infty} f_1(\tau) \cdot f_2(t - \tau) d\tau = \\ &= \int_0^{\infty} f_1(t - \tau) \cdot f_2(\tau) d\tau \div F_1(p) \cdot F_2(p). \end{aligned} \quad (1.17)$$

Напруг на індуктивності

$$U_L(p) = pLI_L(p) - Li_L(0). \quad (1.18)$$

Це відповідає операторній схемі заміщення індуктивності (рис. 2.48)

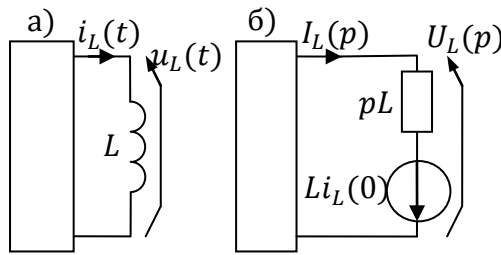


Рисунок 2.48

Напруг на ємності

$$U_C(p) = \frac{I_C(p)}{pC} + \frac{u_C(0)}{p} \quad (1.19)$$

Це відповідає операторній схемі заміщення ємності (рис. 2.49)

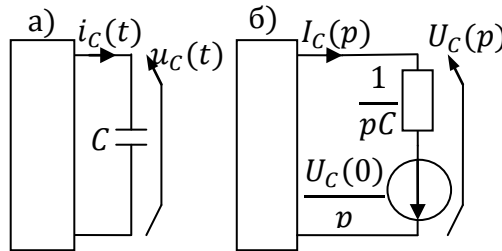


Рисунок 2.49

**Теорема розкладання** (decomposition theorem) використовується після одержання операторного розв'язання у вигляді дробу

$$F(p) = \frac{F_1(p)}{F_2(p)}.$$

Теорема розкладання використовується, коли степінь поліному чисельника більше степеня поліному знаменника.

Якщо корені виразу знаменника дійсні, різні, то теорема розкладання записується у вигляді

$$\begin{aligned} F(p) &= \frac{F_1(p)}{F_2(p)} = \sum_{k=1}^m \frac{A_k}{p - p_k} \rightarrow \sum_{k=1}^m A_k e^{p_k t}, \\ \text{де } A_k &= \left. \frac{F_1(p)}{F_2(p)} (p - p_k) \right|_{p=p_k} = \left. \frac{F_1(p)}{\hat{F}_2(p)} \right|_{p=p_k}. \end{aligned}$$

Отже,

$$F(p) = \frac{F_1(p)}{F_2(p)} = \frac{A_1}{p - p_1} + \dots + \frac{A_k}{p - p_k} + \dots + \frac{A_m}{p - p_m} + A_0,$$

де  $A_0$  - це відношення коефіцієнтів при старших степенях.

Вираз  $F(p)$  у часовій області відповідає

$$f(t) = A_1 e^{p_1 t} + \dots + A_k e^{p_k t} + \dots + A_m e^{p_m t} + A_0 \delta(t).$$

Якщо корені виразу знаменника дійсні, рівні, то теорема розкладання записується у вигляді

$$f(t) = \sum_{k=1}^m \operatorname{Res}_{p_k} F(p_k) = \sum_{k=1}^m \frac{1}{(k-1)!} \frac{d^{k-1}}{dp^{k-1}} \frac{F_1(p_k)}{F_2(p_k)} e^{p_k t} (p - p_k). \quad (1.21)$$

Якщо корені виразу знаменника комплексно-спряжені, то теорема розкладання записується у вигляді (рис. 2.50)

$$f(t) = 2|A_1| e^{\operatorname{Re}(p_1)t} \cos(\operatorname{Im}(p_1)t + \arg(A_1)). \quad (1.22)$$

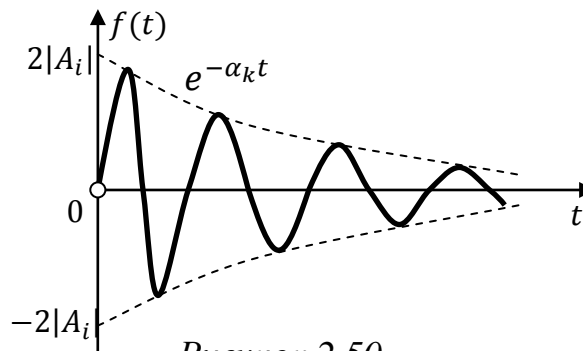


Рисунок 2.50

В основі **часового методу** (the time method) лежать функції Хевісайда та Дірака (Dirac's function and Heaviside's function).

**Функція Хевісайда** або по-іншому функція одиничної сходинок  $1(t)$  визначається у такий спосіб (рис. 2.51)

$$1(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ 1, & t \geq 0. \end{cases} \quad (1.23)$$

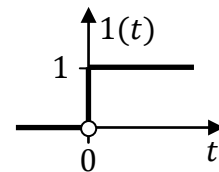


Рисунок 2.51

**Функція Дірака** – це імпульс нескінченно малої тривалості з нескінченно великою амплітудою (рис. 2.52). Площа, обмежена цим імпульсом, дорівнює одиниці. Тому цей імпульс ще називають одиничним імпульсом.

$$\delta(t) = \begin{cases} 0, & t \neq 0, \\ \infty, & t = 0. \end{cases} \quad (1.24)$$

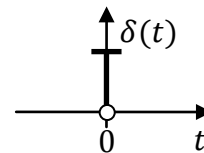


Рисунок 2.52

**Імпульсною характеристикою** називається реакція кола (напруга або струм) на виході при дії на вході кола дельта-функції  $\delta(t)$  (струму або напруги, рис. 2.53).

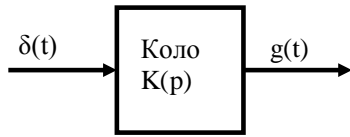


Рисунок 2.53

Розмірність  $g(t)$  дорівнює розмірності реакції, діленої на розмірність дії і на секунду.

**Перехідною характеристикою** називається реакція кола (струм або напруга) на виході, якщо на вході діє одиничний східчастий вплив (струму або напруги).

Перехідна характеристика чисельно дорівнює реакції кола на вплив у вигляді функції Хевісайда, а її розмірність – це відношення розмірності реакції до розмірності дії (рис. 2.54).

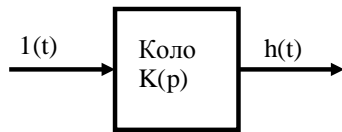


Рисунок 2.54

Розмірність  $h(t)$  указуємо для того, щоб при знаходженні реакції кола на дію у довільної форми одержували необхідну розмірність.

Перехідну характеристику можна визначити операторним методом з урахуванням зображення функції Хевісайда  $1(t) \rightarrow \frac{1}{p}$

$$H(p) = K(p) \frac{1}{p} = \frac{K(p)}{p}. \quad (1.25)$$

Для знаходження оригіналу  $h(t)$  необхідно виконати зворотне перетворення Лапласа

$$h(t) = L^{-1}\left\{\frac{K(p)}{p}\right\}. \quad (1.26)$$

Оскільки зображення за Лапласом  $\delta(p) = 1$ , то реакція у операторному вигляді  $\delta(p)$  буде чисельно дорівнює передавальній функції  $K(p)$

$$G(p) = \delta(p)K(p) = K(p). \quad (1.27)$$

Оригінал імпульсної характеристики  $g(t)$  знаходимо за допомогою зворотного перетворення Лапласа

$$g(t) = L^{-1}\{K(p)\}. \quad (1.28)$$

Зв'язок між імпульсною та перехідною характеристиками

$$h(t) = \int g(t)dt; \quad g(t) = \frac{d}{dt}h(t).$$

У колі (рис. 2.55) можна визначити вихідну напругу або струму через часові характеристики, якщо відома вхідна напруга чи струм.

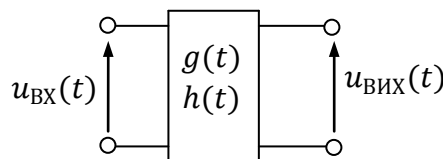


Рисунок 2.55

Знаходження реакції кола на вхідний сигнал через імпульсну характеристику

$$u_{\text{ВИХ}}(t) = u_{\text{ВХ}}(t) * g(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} u_{\text{ВХ}}(\tau) * g(t - \tau) d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} u_{\text{ВХ}}(t - \tau) * g(\tau) d\tau.$$

Знаходження реакції кола на вхідний сигнал через перехідну характеристику

$$\begin{aligned} u_{\text{ВИХ}}(t) &= \dot{u}_{\text{ВХ}}(t) * h(t) = \\ &= u_{\text{ВХ}}(0) * h(t) + \int_{-\infty}^{+\infty} \dot{u}_{\text{ВХ}}(\tau) * h(t - \tau) d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} \dot{u}_{\text{ВХ}}(t - \tau) * h(\tau) d\tau. \end{aligned}$$

**Операційні підсилювачі (ОП)** (operational amplifier) використовують для синтезу активних кіл. ОП за своїми властивостями наближається до ідеального джерела напруги, що керується напругою. У реальних ОП:  $Z_{\text{ВХ}} \rightarrow \infty$  (МОм),  $Z_{\text{ВИХ}} \rightarrow 0$  (Ом), коефіцієнт підсилення за напругою  $K_U = 10^4 \div 10^7$ .

Інвертуюча (рис. 2.56 а) та неінвертуюча (рис. 2.56 б) схеми ввімкнення операційного підсилювача та їх схеми заміщення подані нижче.

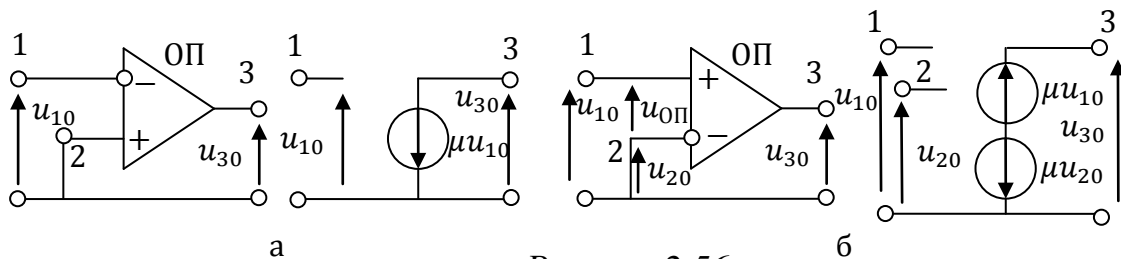


Рисунок 2.56

Операційний підсилювач та схема його заміщення подані на рис. 2.57.

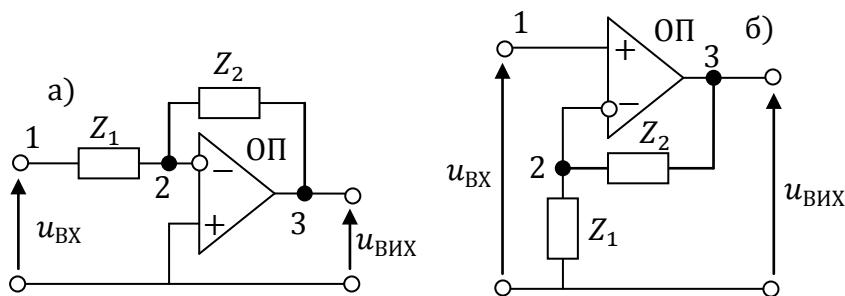


Рисунок 2.57

$$\begin{aligned} K_U(p) &= \frac{u_{\text{ВИХ}}(p)}{u_{\text{ВХ}}(p)} = -\frac{Z_2}{Z_1}; \\ K_U(p) &= \frac{u_{\text{ВИХ}}(p)}{u_{\text{ВХ}}(p)} = 1 + \frac{Z_2}{Z_1}. \end{aligned}$$

## 2.6. Довгі лінії

Кола із розподіленими параметрами (circuit of distributed parameters) на відміну від кіл із зосередженими параметрами, характеризуються хвильовими процесами (wave processes), при цьому величини, що їх описують у загальному випадку є функціями часу та просторових координат

$$u(t, x) = \sqrt{2} U e^{\pm \alpha x} \cos(\omega t + \theta \pm \beta x).$$

Одним із прикладів кіл із розподіленими параметрами є довгі лінії (long lines).

**Довгими лініями (long lines)** називають такі лінії, геометричні розміри яких більше робочої довжини хвилі (operating wavelength) електромагнітних коливань (electromagnetic oscillations) або співвимірні з нею.

Довжина хвилі (length of wave) визначається

$$\lambda = \frac{c}{f},$$

$c = 3 \cdot 10^8$  м/с – швидкість світла (speed of light).

У довгих лініях необхідно враховувати електричні процеси за допомогою яких електрична енергія чи сигнали передаються на відстань, оскільки електричні та магнітні поля розподілені вздовж всієї довжини лінії та перетворення електромагнітної енергії у тепло також відбувається по всій довжині лінії.

**Первинні параметри (linear parameters) довгої лінії** (їх ще називають погонними параметрами) будемо розуміти опір  $R_0$ , індуктивність  $L_0$ , провідність  $G_0$  та ємність  $C_0$ , віднесені до одиниці її довжини (рис. 2.58).

Опір  $R_0$ , зумовлений втратами вздовж лінії, провідність  $G_0$  зумовлена провідністю витoku між проводами, ємність  $C_0$  зумовлена ємністю між проводами, індуктивність  $L_0$  зумовлена магнітним потоком, що зчіплюється з контуром струму. Для одержання рівнянь однорідної лінії розіб'ємо її на окремі ділянки нескінченно малої довжини  $dx$  зі структурою, що вказана на рис. 2.55.

Погонні параметри  $L_0$ ,  $G_0$  та  $C_0$  також є частотно залежними, оскільки від частоти у загальному випадку залежать діелектрична та магнітна проникність середовища. Погонний параметр  $R_0$ , залежить від частоти через поверхневий ефект.

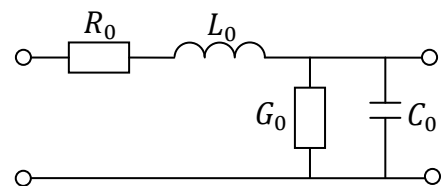


Рисунок 2.58

Таку ділянку лінії описують телеграфними рівняннями (the telegraph equation)

$$\begin{cases} -\frac{\partial u}{\partial x} = R_0 i + L_0 \frac{\partial i}{\partial t}; \\ -\frac{\partial i}{\partial x} = G_0 u + C_0 \frac{\partial u}{\partial t}. \end{cases}$$

Введемо такі позначення

$$Z_0 = R_0 + j\omega L_0, \quad Y_0 = G_0 + j\omega C_0,$$



де  $Z_0$  та  $Y_0$  - відповідно комплексні опори та провідності на одиницю довжини лінії.

### Вторинні параметри (secondary parameters)

Корені рівняння визначаються виразом

$$\gamma = \sqrt{Z_0 Y_0} = \alpha + j\beta,$$

який називають сталою поширення (constant propagation), де  $\alpha$  – це коефіцієнт загасання (coefficient of extinction),  $\beta$  – це коефіцієнт фази (the coefficient phase).

Коефіцієнт загасання  $\alpha$  визначає зменшення амплітуди хвилі струму або напруги при проходженні одиниці довжини. Коефіцієнт фази або хвильове число  $\beta$  показує зміну фази при проходженні одиниці шляху.

Коефіцієнт загасання визначається виразом

$$\alpha = \ln \left( \frac{u_{\text{ПАД}}(x)}{u_{\text{ПАД}}(x+1)} \right) = \ln \left( \frac{e^{-\alpha x}}{e^{-\alpha(x+1)}} \right) = \ln(e^{\alpha}) = \alpha.$$

Розмірність  $\alpha$  має Неп/м.

Величину

$$Z_{XB} = \sqrt{\frac{Z_0}{Y_0}} = \sqrt{\frac{R_0 + j\omega L_0}{G_0 + j\omega C_0}}$$

називають хвильовим опором (wave resistance).

Розв'язок системи телеграфних рівнянь має вигляд

$$\begin{cases} \dot{U}(x) = \frac{1}{2}(\dot{U}_1 + I_1 Z_{XB})e^{-\gamma x} + \frac{1}{2}(\dot{U}_1 - I_1 Z_{XB})e^{\gamma x}; \\ I(x) = \frac{1}{2}\left(I_1 + \frac{\dot{U}_1}{Z_{XB}}\right)e^{-\gamma x} + \frac{1}{2}\left(I_1 - \frac{\dot{U}_1}{Z_{XB}}\right)e^{\gamma x}. \end{cases}$$

Складові у правій частині одержаних рівнянь для струму та напруги у лінії можна трактувати як суму падаючої (the incident wave) та відбитої хвиль (the reflected wave): перша рухається та загасає у напрямку збільшення координати  $x$ , друга – зменшення.

Хвилю, що рухається від початку лінії у бік збільшення  $x$  (рис. 2.59 а), називають **прямою (direct wave)**, а хвилю, що рухається від кінця лінії у напрямку зменшення  $x$  (рис. 2.59 б) – **зворотною (backward wave)**.

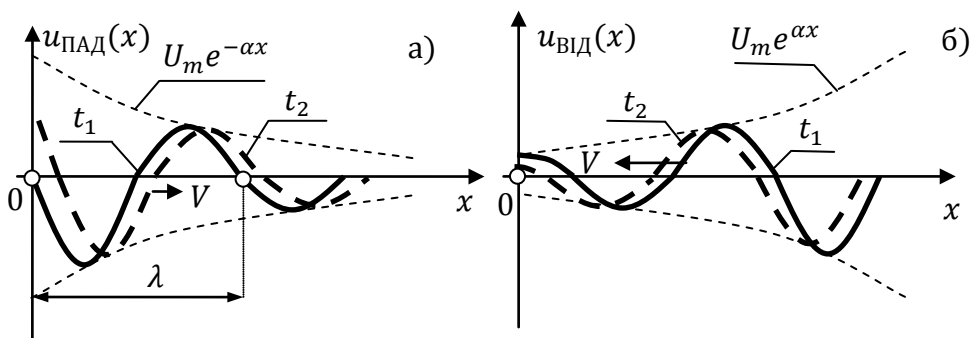


Рисунок 2.59

Загальний вираз напруги

$$u_{\text{ПАД}}(x, t) = U_m e^{-\alpha x} \cos(\omega t + \theta - \beta x) = U_{\text{ПР}},$$

$$u_{\text{ВІД}}(x, t) = U_m e^{\alpha x} \cos(\omega t + \theta + \beta x) = U_{\text{ЗВ}}$$

де  $U_m$  – амплітуда напруги на початку лінії, де її початкова фаза прийнята рівною нулю.

Отже, розподіл напруги вздовж лінії у будь-який момент часу

$$\dot{U} = \dot{U}_{\text{ПАД}} + \dot{U}_{\text{ВІД}}; \quad \dot{I} = \dot{I}_{\text{ПАД}} + \dot{I}_{\text{ВІД}}.$$

Для прямих та зворотних хвиль напруги та струму виконується закон Ома

$$\dot{I}_{\text{ПАД}} = \frac{\dot{U}_{\text{ПАД}}}{Z_{\text{ХВ}}}; \quad \dot{I}_{\text{ВІД}} = \frac{\dot{U}_{\text{ВІД}}}{Z_{\text{ХВ}}}.$$

Для нескінченно довгої лінії у будь-якій її точці **хвильовий опір** є відношення комплексів напруги до струму

$$Z_{\text{ХВ}} = \frac{\dot{U}}{\dot{I}}.$$

Відстань між двома точками хвилі, фази яких різняться на  $2\pi$ , називається довжиною хвилі. Довжина хвилі (wavelength) в лінії  $\lambda$  визначається значенням коефіцієнту фази

$$\beta = \frac{2\pi}{\lambda}.$$

**Фазова швидкість (the phase speed)** – це швидкість переміщення вздовж лінії незмінного фазового стану, тобто швидкість, з якою необхідно переміщуватись вздовж лінії, щоб спостерігати одну й ту же фазу хвилі

$$V_\phi = \frac{\omega}{\beta}.$$

**Коефіцієнт відбиття (the reflection coefficient)** у загальному випадку є відношення амплітуди струмів або напруг зворотної та прямої хвиль в будь-якій точці лінії.

Найчастіше коефіцієнт відбиття визначається у точках, де є яка-небудь неоднорідність (кінець або початок лінії).

Коефіцієнт відбиття за напругою (the reflection coefficient for voltage)

$$\dot{n}_u = \frac{\dot{U}_2 - \dot{I}_2 Z_{\text{ХВ}}}{\dot{U}_2 + \dot{I}_2 Z_{\text{ХВ}}} = \frac{\dot{I}_2 Z_H - \dot{I}_2 Z_{\text{ХВ}}}{\dot{I}_2 Z_H + \dot{I}_2 Z_{\text{ХВ}}} = \frac{Z_H - Z_{\text{ХВ}}}{Z_H + Z_{\text{ХВ}}}.$$

Коефіцієнт відбиття за струмом (the reflection coefficient for current)

$$\dot{n}_i = \frac{Z_{\text{ХВ}} - Z_H}{Z_{\text{ХВ}} + Z_H} = -\frac{Z_H - Z_{\text{ХВ}}}{Z_H + Z_{\text{ХВ}}} = -\dot{n}_u.$$

Оскільки  $\dot{n}_i = -\dot{n}_u$ , то можна зробити висновок, що у там, де у розподілі є максимум напруги, там буде мінімум струму.

Відсутність зворотної хвилі має ту перевагу, що вся потужність, що переноситься прямою хвилею до кінця лінії, поглинається опором навантаження. При присутності зворотної хвилі частина потужності прямої хвилі повертається у джерело.

Коефіцієнт біжної хвилі (the coefficient of traveling wave)

$$KBX = \frac{U_{min}}{U_{max}} = \frac{|U_{ПАД}| - |U_{ВІД}|}{|U_{ПАД}| + |U_{ВІД}|} = \frac{1 - |n|}{1 + |n|}.$$

Коефіцієнт стійної хвилі (the coefficient of standing wave)

$$КСХ = \frac{1}{KBX}$$

Процес знаходження у кожній точці струму та напруги буде зводитися до знаходження суми двох векторів – падаючої та відбитої хвиль. Цей процес зручно зображувати у вигляді розподілу амплітуд струмів або напруг вздовж всієї довжини лінії.

Коефіцієнт відбиття за напругою

$$\dot{n}_u = \frac{\dot{U}_{ВІД}}{\dot{U}_{ПАД}} = ne^{j\varphi_n}$$

Розподіл амплітуд напруги або струму уздовж лінії зручніше будувати від кінця лінії, припустивши, що відомо падаючу хвилю наприкінці лінії

$$\dot{U}_{ВІД} = \dot{n}\dot{U}_{ПАД} = nU_{ПАД}e^{j(\varphi_{ПАД} + \varphi_n)}.$$

Залежно від знака аргументу  $\varphi_n$  коефіцієнта відбиття вектор відбитої хвилі наприкінці лінії може бути спрямований або убік випередження вектора падаючої хвилі при  $\varphi_n > 0$  (рис. 2.60), або убік відставання при  $\varphi_n < 0$  (рис. 2.60).

Для випадку  $\varphi_n > 0$  першим буде максимум – вектори падаючих і відбитої хвиль рухаються на зустріч один одному і складуться у фазі (рис. 2.60).

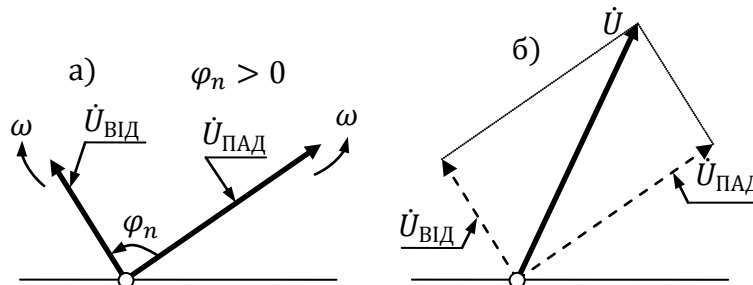


Рисунок 2.60

Кутову відстань до першого по порядку максимуму можна визначити у такий спосіб: два вектори додаються у фазі, пройшовши кутову відстань рівну  $\varphi_n/2$  (навпіл, тому що рухаються на зустріч один одному)

$$\frac{\varphi_n}{2} = \beta \cdot x_{max}.$$

Звідси відстань до першого по порядку максимуму

$$x_{max} = \frac{1}{\beta} \cdot \frac{\varphi_n}{2} = \frac{\lambda}{2\pi} \cdot \frac{\varphi_n}{2}.$$

При цьому перший мінімум напруги буде на відстані від першого максимуму у чверть довжини хвилі

$$x_{min} = x_{max} + \frac{\lambda}{4}.$$

Для випадку  $\varphi_n < 0$  (рис. 2.61) першим буде мінімум, оскільки вектори падаючої та відбитої напруг починають розходитися.

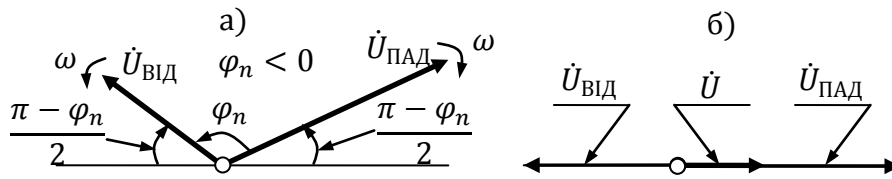


Рисунок 2.61

При цьому кожний із них до точки першого мінімуму від кінця лінії пройде кутову відстань

$$\frac{\pi - |\varphi_n|}{2} = \beta \cdot x_{\min}.$$

Звідси відстань до першого по порядку мінімуму

$$x_{\min} = \frac{1}{\beta} \cdot \left[ \pi - \frac{|\varphi_n|}{2} \right] = \frac{\lambda}{2\pi} \cdot \left[ \pi - \frac{|\varphi_n|}{2} \right].$$

При цьому перший максимум напруги буде на відстані

$$x_{\max} = x_{\min} + \frac{\lambda}{4}.$$

Активна потужність вздовж лінії

$$P_{\text{АКТ}} = UI \cos \varphi.$$

Зсув фази між струмом та напругою в будь-якій точці лінії складає  $\pi/2$ , тому активна потужність в будь-якій точці лінії буде 0.

Режим роботи довгої лінії, що навантажена на опір, рівний хвильовому, називається **узгодженням**, а сама лінія називається лінією з **узгодженням навантаженням (coordinated loading)**.

**Режим біжних хвиль** (the mode of traveling wave) характеризується наявністю тільки падаючої (прямої) хвилі, що поширюється від генератора до навантаження.

Відбита хвиля відсутня. Потужність, що переноситься падаючою хвилею, повністю виділяється у навантаженні.

**Режим стійних хвиль** (the mode of standing wave) встановлюється за умови рівності амплітуд падаючої та відбитої хвиль. Виконання цієї умови можливе для лінії без втрат. Режим стійних хвиль має місце в лінії, що навантажена на опір, в якому немає втрат енергії падаючої хвилі. При цьому падаюча хвиля повністю перетворюється на відбиту хвилю.

У випадку лінії без втрат ( $\alpha = 0$ ) вигляд рівнянь передачі

$$\begin{cases} \dot{U} = \dot{U}_2 \cos(\beta x) + j \dot{I}_2 Z_{XB} \sin(\beta x); \\ \dot{I} = \dot{I}_2 \cos(\beta x) + j \frac{\dot{U}_2}{Z_{XB}} \sin(\beta x). \end{cases}$$

Рівняння передачі у режимі холостого ходу ( $\dot{I}_2 = 0$ )

$$\begin{cases} \dot{U} = \dot{U}_2 \cos(\beta x); \\ \dot{I} = j \frac{\dot{U}_2}{Z_{XB}} \sin(\beta x). \end{cases}$$

Рівняння передачі у режимі короткого замикання ( $\dot{U}_2 = 0$ )

$$\begin{cases} \dot{U} = j \dot{I}_2 Z_{XB} \sin(\beta x); \\ \dot{I} = \dot{I}_2 \cos(\beta x). \end{cases}$$

Вхідний опір такої лінії, взявши  $\dot{U}_2 = \dot{I}_2 Z_H$

$$Z_{BX} = Z_{XB} \frac{Z_H \cos(\beta x) + j Z_{XB} \sin(\beta x)}{Z_{XB} \cos(\beta x) + j Z_H \sin(\beta x)}.$$

Вхідний опір та провідність кола у режимі холостого ходу та короткого замикання

$Z_{BX,XX} = -j Z_{XB} \operatorname{ctg}(\beta x);$	$Y_{BX,XX} = j Y_{XB} \operatorname{tg}(\beta x);$
$Z_{BX,KЗ} = j Z_{XB} \operatorname{tg}(\beta x);$	$Y_{BX,KЗ} = -j Y_{XB} \operatorname{ctg}(\beta x).$

Для максимальної передачі потужності необхідно, щоб довга лінія була узгоджена, тобто щоб не було відбитої хвилі.

Для **узгодженого режиму (corrupted mode)** необхідно, щоб опір навантаження дорівнював хвильовому опору.

Якщо лінія не узгоджена, то необхідно штучним шляхом досягти рівностей опора навантаження та хвильового опору лінії.

Короткозамкнені відрізки (short-circuited segments) лінії широко використовуються у якості реактивних шлейфів.

**Реактивні шлейфи** (reactive plume) – це пристрої, що вмикаються паралельно до будь-якої ділянки кола для компенсації уявної складової його вхідної провідності.

Вхідний опір лінії без втрат (input resistance of the line without losses)

$$Z_{BX} = R_{XB} \frac{Z_H \cos\left(\frac{2\pi l}{\lambda}\right) + j R_{XB} \sin\left(\frac{2\pi l}{\lambda}\right)}{R_{XB} \cos\left(\frac{2\pi l}{\lambda}\right) + j Z_H \sin\left(\frac{2\pi l}{\lambda}\right)}.$$

Вхідний опір для ліній різної довжини

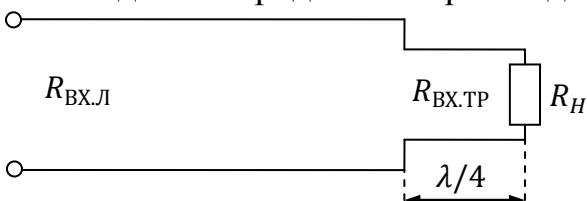


Рисунок 2.62

$$\begin{aligned} Z_{BX}(l = \lambda/2) &= Z_H; \\ Z_{BX}\left(l = \frac{\lambda}{4}\right) &= \frac{R_{XB}^2}{Z_H}; \\ Z_{BX}(\lambda/8) &= R_{XB} \frac{Z_H + j R_{XB}}{R_{XB} + j Z_H}. \end{aligned}$$

**Трансформуючі лінії** – це відрізки довгої лінії з властивостями, що призначені для узгодження опорів лінії (рис. 2.62).

Параметри відрізка лінії, що використовується у якості чверть хвильового трансформатора, вибирають таким чином, щоб хвильовий опір трансформатора

$$R_{BX,Л} = R_{BX,ТР}, \quad R_{BX,ТР} = \frac{R_{XB,ТР}^2}{R_H}, \quad R_{XB,ТР} = \sqrt{R_{BX,Л} R_H}.$$

## СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Методичні рекомендації до підготовки к вступним іспитам в магістратуру за спеціальністю «Радіoeлектронні пристрої, системи та комплекси» з дисципліни «Основи теорії кіл» для студентів радіотехнічного факультету / Уклад.: М.І. Ястребов, - К.: НТУУ "КПІ", 2015. – 72 с.
2. Методичні вказівки до практичних занять на тему «Розрахунок лінійних електричних кіл постійного струму» для студентів радіотехнічного факультету спеціальності 172 Телекомунікації та радіотехніка з дисципліни «Основи теорії кіл» / Укладачі: А. В. Булашенко, М. І. Ястребов. – К.: КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2018. – 53с.
2. Методичні вказівки до практичних занять на тему «Розрахунок лінійних електричних кіл змінного струму» з дисципліни «Основи теорії кіл» для студентів радіотехнічного факультету, спеціальності 172 Телекомунікації та радіотехніка / Укладачі: А. В. Булашенко, М. І. Ястребов. – К.: КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2018. – 44с.
3. Методичні вказівки до практичних занять з дисципліни «Основи теорії кіл» на тему «Розрахунок коливальних контурів» для студентів радіотехнічного факультету спеціальності 172 Телекомунікації та радіотехніка / Укладачі: А. В. Булашенко, М. І. Ястребов. – К.: КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2018. – 39с.
4. Методичні вказівки до практичних занять з дисципліни «Основи теорії кіл» на тему «Розрахунок простих схемних функцій та чотириполюсників» для студентів радіотехнічного факультету, спеціальності 172 Телекомунікації та радіотехніка / Укладачі А. В. Булашенко, М. І. Ястребов. – К.: КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2018. – 31с.
5. Методичні вказівки до практичних занять з дисципліни «Процеси в лінійних електронних схемах» на тему «Синтез пасивних двополюсників» для студентів радіотехнічного факультету спеціальності 172 Телекомунікації та радіотехніка / Укладачі А. В. Булашенко, М. І. Ястребов. – К.: КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2018. – 38с.
6. Основи теорії кіл. Збірник задач [Електронний ресурс]: навч. посіб. для студентів спеціальності 172 «Телекомунікації та радіотехніка» / А. В. Булашенко, М. І. Ястребов; КПІ ім. Ігоря Сікорського. – Електронні текстові дані (1 файл 2.15 Мбайт). – Київ: КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2019. – 120с.
7. Збірник задач з дисципліни «Основи теорії кіл» для студентів радіотехнічного факультету спеціальності 172 Телекомунікації та радіотехніка / Укладачі: А. В. Булашенко, М. І. Ястребов. – К.: КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2017. – 123с.
8. Збірник задач з дисципліни «Процеси в лінійних електронних схемах» для студентів радіотехнічного факультету спеціальності 172 Телекомунікації та радіотехніка / Укладачі: А. В. Булашенко, М. І. Ястребов. – К.: КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2018. – 86с.

9. Основи теорії кіл. Розрахунок лінійних електричних кіл постійного струму. Практикум. [Електронний ресурс]: навч. посіб. для студентів спеціальності 172 «Телекомунікації та радіотехніка» / А. В. Булашенко, М.І. Ястребов; КПІ ім. Ігоря Сікорського. – Електронні текстові дані (1 файл 1.57 Мбайт). – Київ: КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2019. – 62с.

10. Основи теорії кіл. Розрахунок схемних функцій, чотириполосників та операторний метод простих кіл. Практикум. [Електронний ресурс]: навч. посіб. для студентів спеціальності 172 «Телекомунікації та радіотехніка» / А. В. Булашенко; КПІ ім. Ігоря Сікорського. – Електронні текстові дані (1 файл 5.65 Мбайт). – Київ: КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2019. – 65с.

11. Основи теорії кіл. Розрахунок лінійних електричних кіл змінного струму. Практикум. [Електронний ресурс]: навч. посіб. для студентів спеціальності 172 «Телекомунікації та радіотехніка» / А. В. Булашенко; КПІ ім. Ігоря Сікорського. – Електронні текстові дані (1 файл 1.31 Мбайт). – Київ: КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2019. – 48 с.

12. Основи теорії та комп'ютерне моделювання електронних кіл: навчальний посібник [Електронний ресурс]: навч. посіб. для студентів спеціальності 172 «Телекомунікації та радіотехніка» / В. Д. Сташук, А.В. Булашенко; КПІ ім. Ігоря Сікорського. – Електронні текстові дані (1 файл 6.58 Мбайт). – Київ: КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2019. – 400с

13. Основи теорії кіл: підручник для студентів вищих навчальних закладів. Ч.1 / Ю. О. Коваль, Л. В. Гринченко, І. О. Мілютенко, О.І. Рибіна; за аг. Редакцією В.М. Шокала та В. І. Правди. – Х.: Компанія Сміт, 2008. – 432 с.

14. Основи теорії кіл: Підручник для вищих навчальних закладів. Ч.2 / Ю. А. Коваль, Л. В. Гринченко, І.О. Милютченко, О. І. Рибін / за заг. ред. В.М. Шокола, В. І. Правди. – Харків: Компанія СМІТ, 2008 – 560с.

15. Атабеков Г. И. Основы теории цепей. – М.: Энергия, 1969. – 424с.

16. Зевеке Г.В. Основы теории цепей: учебник для вузов / Г. В. Зевеке, П. А. Ионкин и др. – М.: Энергоатомиздат, 1989. – 528 с.

17. Основы теории электронных схем / В.П. Сигорский, А.И. Петренко. – К.: Вища школа, 1971. – 568с.

18. Зернов Н. В. Теория радиотехнических цепей / Н.В. Зернов, В.Г. Карпов. – Л.: Энергия, 1972.– 916с.

19. Бессонов Л.А. Теоретические основы электротехники. Электрические цепи: учебник.- М.: Гардарики, 2002–640 с.

20. Бычков Ю. А. Сборник задач и практикум по основам теории цепей / Ю. А. Бычков, В. М. Золотницкий, Э. П. Чернышев. – 2-е изд. – СПб.: Питер, 2007. – 300с.

21. Булашенко А.В. Побудова векторних діаграм за допомогою математичного пакету MathCAD / А.В. Булашенко // Науково-методична конференція викладачів, співробітників і студентів : тези доповідей, 27 квітня 2010 року / Конотопський ін-т СумДУ; Відп. за вип. Н.В. Барбара, О.С. Заїка. — Суми : СумДУ, 2010. – Ч.2. – С. 10-13.

## ДОДАТОК А

### Таблиця перетворення Лапласа

Таблиця А.1 - Зображення та оригінал деяких функцій

Оригінал	Зображення	Оригінал	Зображення
1	$\frac{1}{p}$	$(1 - at)e^{\pm at}$	$\frac{p}{(p \mp \alpha)^2}$
$t$	$\frac{1}{p^2}$	$\frac{1}{\alpha}(1 - e^{-\alpha t})$	$\frac{1}{p(p + \alpha)}$
$e^{\pm at}$	$\frac{1}{p \mp \alpha}$	$\cos(\omega_0 t)$	$\frac{p}{p^2 + \omega_0^2}$
$e^{\pm j\omega_0 t}$	$\frac{1}{p \mp j\omega_0}$	$\sin(\omega_0 t)$	$\frac{\omega_0}{p^2 + \omega_0^2}$
$e^{\pm j(\omega_0 t + \varphi)}$	$\frac{e^{j\psi}}{p \mp j\omega_0}$	$\sin(\omega_0 t + \psi)$	$\frac{p \cdot \sin(\psi) + \omega_0 \cdot \cos(\psi)}{p^2 + \omega_0^2}$
$te^{-\alpha t}$	$\frac{1}{(p + \alpha)^2}$	$e^{-\alpha t} \sin(\omega_0 t)$	$\frac{\omega_0}{(p + \alpha)^2 + \omega_0^2}$
$\frac{1}{\alpha - \beta}(e^{\beta t} - e^{\alpha t})$	$\frac{1}{(p + \alpha)(p + \beta)}$	$e^{-\alpha t} \cos(\omega_0 t)$	$\frac{p + \alpha}{(p + \alpha)^2 + \omega_0^2}$
$t^n$	$\frac{n!}{p^{n+1}}$	$\cos(\omega_0 t + \varphi)$	$\frac{p \cdot \cos(\varphi) - \omega_0 \cdot \sin(\varphi)}{p^2 + \omega_0^2}$
$ch(at)$	$\frac{a}{p^2 - a^2}$	$sh(at)$	$\frac{a}{p^2 + a^2}$
$\frac{1}{a}(e^{at} - 1)$	$\frac{1}{p(p - a)}$	$1 - e^{-t/a}$	$\frac{1}{p(1 + ap)}$
$\frac{1}{a^2}te^{-\frac{t}{a}}$	$\frac{1}{(1 + ap)^2}$	$\frac{e^{at} - e^{bt}}{a - b}$	$\frac{1}{(p - a)(p - b)}$
$(1 + at)e^{at}$	$\frac{p}{(p - a)^2}$	$\frac{1}{a^2}(e^{at} - 1 - at)$	$\frac{1}{(p - a)p^2}$
$\frac{1}{2}t^2e^{at}$	$\frac{1}{(p - a)^3}$	$(t + \frac{1}{2}at^2)e^{at}$	$\frac{p}{(p - a)^3}$
$\cos^2(at)$	$\frac{p^2 + 2a^2}{p(p^2 + 4a^2)}$	$\sin^2(at)$	$\frac{2a^2}{p(p^2 + 4a^2)}$
$ch^2(at)$	$\frac{p^2 - 2a^2}{p(p^2 - 4a^2)}$	$sh^2(at)$	$\frac{2a^2}{p(p^2 - 4a^2)}$



## ДОДАТОК Б

### Формули диференціювання

Правила диференціювання

Нехай задані диференційовані функції  $U = u(x)$ ,  $V = v(x)$

1. Похідна алгебраїчної суми кінцевого числа диференційованих функцій дорівнює сумі похідних цих функцій

$$\frac{d}{dx} [U \pm V] = \frac{d}{dx} [U] \pm \frac{d}{dx} [V]$$

2. Похідна добутку двох диференційованих функцій дорівнює сумі добутку похідної першого співмножника на другий та добутку похідної другого співмножника на перший:

$$\frac{d}{dx} [U \cdot V] = \frac{d}{dx} [U] \cdot V + \frac{d}{dx} [V] \cdot U$$

3. Похідна частки визначається виразом

$$\frac{d}{dx} \left[ \frac{U}{V} \right] = \frac{\frac{d}{dx} [U] \cdot V - \frac{d}{dx} [V] \cdot U}{V^2}$$

Таблиця похідних деяких функцій

Функція	Похідна функції	Функція	Похідна функції
$\sin x$	$\cos x$	$x^c$	$cx^{c-1}$
$\cos x$	$-\sin x$	$ x $	$\text{sign } x$
$\text{tg } x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$
$\text{ctg } x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$	$\frac{1}{x^c}$	$-\frac{c}{x^{c+1}}$
$e^x$	$e^x$	$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$	$\sqrt[n]{x}$	$\frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$
$\log_a x$	$\frac{\log_a e}{x}$	$c^x$	$c^x \ln c$
$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arccos x$	$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\text{arctg } x$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\text{arcctg } x$	$\frac{-1}{1+x^2}$
$\text{arcsec } x$	$\frac{1}{ x \sqrt{x^2-1}}$	$\arccos x$	$\frac{-1}{ x \sqrt{x^2-1}}$
$\text{sh } x$	$\text{ch } x$	$\text{ch } x$	$\text{sh } x$

Формула інтегрування частинами

$$\int u(\tau) dv(\tau) = u(\tau)v(\tau)|_0^t - \int v(\tau) du(\tau).$$

## ДОДАТОК В

### Тригонометричні формули

#### 1. Формули додавання аргументів

$$\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y;$$

$$\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \pm \sin x \sin y;$$

$$\operatorname{tg}(x \pm y) = \frac{\operatorname{tg} x \pm \operatorname{tg} y}{1 \mp \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y};$$

$$\operatorname{ctg}(x \pm y) = \frac{\operatorname{ctg} x \operatorname{ctg} y \mp 1}{\operatorname{ctg} y \pm \operatorname{ctg} x}.$$

#### 2. Формули Ейлера

$$\sin x = \frac{e^{jx} - e^{-jx}}{2j}; \quad \cos x = \frac{e^{jx} + e^{-jx}}{2};$$

$$e^{jx} = \cos x + j \sin x; \quad e^{-jx} = \cos x - j \sin x.$$

#### 3. Деякі значення тригонометричних функцій

Кут $x$	$\sin x$	$\cos x$	$\operatorname{tg} x$	$\operatorname{ctg} x$
0	0	1	0	-
$\pi/6$	1/2	$\sqrt{3}/2$	$1/\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$
$\pi/4$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$	1	1
$\pi/3$	$\sqrt{3}/2$	1/2	$\sqrt{3}$	$1/\sqrt{3}$
$\pi/2$	1	0	-	0
$2\pi/3$	$\sqrt{3}/2$	-1/2	$-\sqrt{3}$	$-1/\sqrt{3}$
$3\pi/4$	$\sqrt{2}/2$	$-\sqrt{2}/2$	-1	-1
$5\pi/6$	1/2	$-\sqrt{3}/2$	$-1/\sqrt{3}$	$-\sqrt{3}$
$\pi$	0	-1	0	-
$2\pi$	0	1	0	-

#### 4. Формули зведення

Аргумент $\beta$	Тригонометричні функції			
	$\sin \beta$	$\cos \beta$	$\operatorname{tg} \beta$	$\operatorname{ctg} \beta$
$\alpha + \pi/2$	$\cos \alpha$	$-\sin \alpha$	$-\operatorname{ctg} \alpha$	$-\operatorname{tg} \alpha$
$\alpha + \pi$	$-\sin \alpha$	$-\cos \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$	$\operatorname{ctg} \alpha$
$\alpha + 3\pi/2$	$-\cos \alpha$	$\sin \alpha$	$-\operatorname{ctg} \alpha$	$-\operatorname{tg} \alpha$
$\alpha + 2\pi$	$\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$	$\operatorname{ctg} \alpha$
$-\alpha$	$-\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$-\operatorname{tg} \alpha$	$-\operatorname{ctg} \alpha$
$-\alpha + \pi/2$	$\cos \alpha$	$\sin \alpha$	$\operatorname{ctg} \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$
$-\alpha + \pi$	$\sin \alpha$	$-\cos \alpha$	$-\operatorname{tg} \alpha$	$-\operatorname{ctg} \alpha$
$-\alpha + 3\pi/2$	$-\cos \alpha$	$-\sin \alpha$	$\operatorname{ctg} \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$
$-\alpha + 2\pi$	$-\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$-\operatorname{tg} \alpha$	$-\operatorname{ctg} \alpha$

## ДОДАТОК Г

Таблиця інтегралів

Значення функції	Значення первісної	Значення функції	Значення первісної
$x^\alpha, \alpha \neq -1$	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$	$\frac{1}{x}$	$\ln(x)$
$e^x$	$e^x$	$a^x, a \neq 1$	$\frac{a^x}{\ln(a)}$
$\sin x$	$-\cos x$	$\cos x$	$\sin x$
$\operatorname{sh} x$	$\operatorname{ch} x$	$\operatorname{ch} x$	$\operatorname{sh} x$
$\frac{1}{\sin^2 x}$	$-\operatorname{ctg} x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\operatorname{tg} x$
$\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$	$-\operatorname{cth} x$	$\frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$	$\operatorname{th} x$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\operatorname{arctg} x$	$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	$\ln(x + \sqrt{1+x^2})$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x$	$\frac{1}{x^2-1}$	$\frac{1}{2} \ln \left  \frac{x-1}{x+1} \right $

Для розрахунків електричних кіл використовують допоміжні одиниці, які наведені у таблиці Г.2.

Таблиця Г.2 – Допоміжні величини

Назва	Величина	Назва	Величина
кіло	$10^3$	піко	$10^{-12}$
мега	$10^6$	нано	$10^{-9}$
гіга	$10^9$	мікро	$10^{-6}$
тера	$10^{12}$	мілі	$10^{-3}$

Таблиця Г.3 – Поліноми Батерворта

n	Поліноми Батерворта
1	$p+1$
2	$p^2+1.41p+1$
3	$(p+1)(p^2+p+1)$
4	$(p^2+1.85p+1)(p^2+0.76p+1)$
5	$(p+1)(p^2+0.618p+1)(p^2+1.618p+1)$
6	$(p^2+1.932p+1)(p^2+1.414p+1)(p^2+0.765p+1)$
7	$(p+1)(p^2+1.8p+1)(p^2+1.247p+1)(p^2+0.445p+1)$
8	$(p^2+0.39p+1)(p^2+0.11p+1)(p^2+1.66p+1)(p^2+1.96p+1)$

## ДОДАТОК Д

### Схемні функції

Коефіцієнт передачі за струмом:

за матрицею опорів	за матрицею провідностей
$K_i = \frac{I_{BIX}}{I_{BX}} = \frac{\Delta_{ab}}{\Delta_{aa}}$	$K_i = \frac{I_{BIX}}{I_{BX}} = \frac{\Delta_{ab}}{\Delta} \cdot Y_H$

Коефіцієнт передачі за напругою

за матрицею опорів	за матрицею провідностей
$K_u = \frac{U_{BIX}}{U_{BX}} = \frac{\Delta_{ab}}{\Delta} \cdot Z_H$	$K_u = \frac{U_{BIX}}{U_{BX}} = \frac{\Delta_{ab}}{\Delta_{aa}}$

Передавальна провідність

за матрицею опорів	за матрицею провідностей
$Y_{ba} = \frac{I_{BIX}}{U_{BX}} = \frac{\Delta_{ab}}{\Delta}$	$Y_{ba} = \frac{I_{BIX}}{U_{BX}} = \frac{\Delta_{ab}}{\Delta_{aa}} \cdot Y_H$

Передавальний опір

за матрицею опорів	за матрицею провідностей
$Z_{ba} = \frac{U_{BIX}}{I_{BX}} = \frac{\Delta_{ab}}{\Delta_{aa}} \cdot Z_H$	$Z_{ba} = \frac{U_{BIX}}{I_{BX}} = \frac{\Delta_{ab}}{\Delta}$

Вхідний опір

за матрицею опорів	за матрицею провідностей
$Z_{BX} = \frac{U_{BX}}{I_{BX}} = \frac{\Delta}{\Delta_{aa}}$	$Z_{BX} = \frac{U_{BX}}{I_{BX}} = \frac{\Delta_{aa}}{\Delta}$

Система  $Y$  – параметрів чотириполіусників

$$\begin{cases} I_1 = Y_{11} \cdot U_1 + Y_{12} \cdot U_2, \\ I_2 = Y_{21} \cdot U_1 + Y_{22} \cdot U_2; \end{cases} \quad \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix}.$$

Система  $Z$  – параметрів чотириполіусника

$$\begin{cases} U_1 = Z_{11} \cdot I_1 + Z_{12} \cdot I_2, \\ U_2 = Z_{21} \cdot I_1 + Z_{22} \cdot I_2; \end{cases} \quad \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix}.$$

Система  $h$  – параметрів чотириполіусника

$$\begin{cases} U_1 = h_{11} \cdot I_1 + h_{12} \cdot U_2, \\ I_2 = h_{21} \cdot I_1 + h_{22} \cdot U_2; \end{cases} \quad \begin{bmatrix} U_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_1 \\ U_2 \end{bmatrix}.$$

Система  $A$  – параметрів чотириполіусника

$$\begin{cases} U_1 = A_{11} \cdot U_2 + A_{12} \cdot I_2, \\ I_1 = A_{21} \cdot U_2 + A_{22} \cdot I_2; \end{cases} \quad \begin{bmatrix} U_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_2 \\ I_2 \end{bmatrix}.$$

Коли розглядаються  $A$  - параметри, вихідний  $I_2$  струм направляють назовні.

Система  $B$  – параметрів чотириполіусника

$$\begin{cases} U_2 = B_{11} \cdot U_1 + B_{12} \cdot I_1, \\ I_2 = B_{21} \cdot U_1 + B_{22} \cdot I_1; \end{cases} \quad \begin{bmatrix} U_2 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_1 \\ I_1 \end{bmatrix}.$$

Система  $F$  – параметрів чотириполіусника

$$\begin{cases} I_1 = F_{11} \cdot U_1 + F_{12} \cdot I_2, \\ U_2 = F_{21} \cdot U_1 + F_{22} \cdot I_2; \end{cases} \quad \begin{bmatrix} I_1 \\ U_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} \\ F_{21} & F_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_1 \\ I_2 \end{bmatrix}.$$